5. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNGEN

1. a. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \quad | \cdot (n+1)$

$n!(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = (n+1)!$

b. $\dfrac{n!}{n(n-1)} = \dfrac{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)}(n-2)(n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{\cancel{n} \cdot \cancel{(n-1)}} = (n-2)!$

c. $(n+2)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n(n+1)(n+2)$

Dagegen ist $n+2! = n+2$, denn ohne Klammer bezieht sich die Fakultät nur auf die 2 (Punktrechnung vor Strichrechnung)

Beispiel $n=3$: $(n+2)! = (3+2)! = 5! = 120$

$n+2! = 3+2! = 3+2 = 5$

d. $(n+2)!$ siehe c.

$n!+2! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n + 2$

Beispiel $n=3$: $(n+2)! = 5! = 120$ (s.o.)

$n!+2! = 3!+2! = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 6+2 = 8$

e Beispiel $n=4$

$(2n)! = (2 \cdot 4)! = 8! = 40320$

$2!\,n! = 2! \cdot 4! = 2 \cdot 24 = 48$

f. $\dbinom{n}{k}\dfrac{n-k}{k+1} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \dfrac{n-k}{k+1}$

$= \dfrac{n! \quad \cancel{(n-k)}}{k!(k+1) \cdot \cancel{(n-k)}(n-k-1)!}$

$= \dfrac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \dbinom{n}{k+1}$

HAUSÜBUNGEN

2	3	4	5	6	Σ
2	5	7	4	3	21

2

2. Von schraffierter Zelle zu

A: Zeile gleich, Spalte +1, also $\binom{n-1}{k+1}$

B: Zeile +1, Spalte gleich, also $\binom{n}{k}$

C: Zeile −1, Spalte −1, also $\binom{n-2}{k-1}$

D: Zeile +2, Spalte +2, also $\binom{n+1}{k+2}$ je 0,5 2

3. a. i $n = 5 + 7 = 12$ 0,5

ii $x = \binom{12}{7} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\,7!} = \frac{\cancel{12}\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot 9\cdot 8}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{5}} = 792$ 1

iii davor $\binom{12}{6} a^6 b^6$ $\binom{12}{6} = \frac{12!}{6!\,6!} = 924$ 1

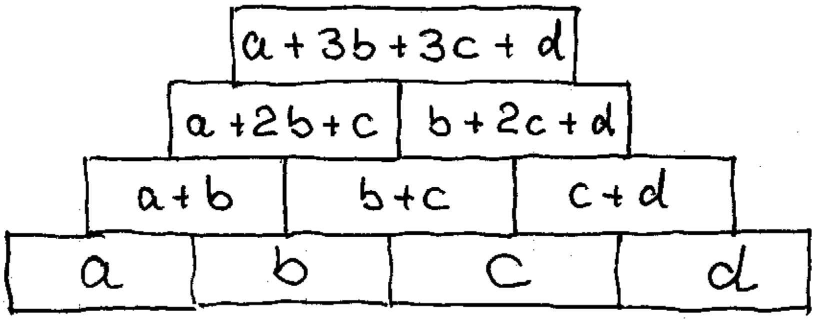
dahinter $\binom{12}{8} a^4 b^8$ $\binom{12}{8} = \frac{12!}{8!\,4!} = 495$ 1

b. Wegen $r + 12 = n \Rightarrow r = 12 - n$

$$y = \binom{n}{12} = \binom{n}{n-12}$$

also $\binom{n}{12} a^{n-12} b^{12}$ 1,5

4. a. allgemeine Lösung



Die vier Zahlen der Basis sind a, b, c und d. Dann ist die Zahl an der Spitze $a+3b+3c+d$. D.h. die Veränderungen am Rand wirken sich einfach aus (+/-1 -> +/-1) die Veränderungen der beiden mittleren Zahlen b und c wirken sich Dreifach aus (+/- 1 -> +/- 3) ③

b i Man verändert eine äußere Zahl um einen Betrag und die andere um den entgegengesetzten.

79
31 48
13 18 30
8 5 13 17
+4 −4

79
29 50
11 18 32
4 7 11 21
+2 −2

ii. Man verändert eine mittlere Zahl um einen Betrag und die andere um den entgegengesetzten.

pro Strategie ①

iii. Man verändert eine mittlere Zahl um einen Betrag und eine äußere entgegengesetzt um das Dreifache.

also max 3

79
33 46
12 21 25
4 8 13 12
+3 $\xrightarrow{\cdot(-3)}$ −9

②

c. Mauer mit x ausfüllen

69+3x
25+2x 44+x
12+x 13+x 31
12 x 13 18

Ansatz 1

$$69+3x = 81 \quad | -69$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

Lösung 1

②

5 a $n = 6$ z.B. $k = 3$

$$\binom{6}{3} + 2\cdot\binom{6}{4} + \binom{6}{5} = 20 + 2\cdot 15 + 6 = 56$$

$$\binom{8}{5} = 56$$

stimmt ☺ (1)

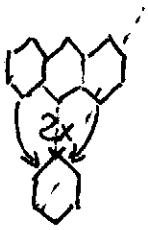
$n = 7$ z.B. $k = 2$

$$\binom{7}{2} + 2\cdot\binom{7}{3} + \binom{7}{4} = 21 + 2\cdot 35 + 35 = 126$$

$$\binom{9}{4} = 126$$

✓ (1)

b Grafisch



gleiche Spalte!

$$\binom{n}{k} + 2\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2} = \underbrace{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}_{} + \underbrace{\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k+2}}_{}$$

$$= \underbrace{\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2}}_{}$$

$$= \binom{n+2}{k+2}$$

$\underbrace{\quad}$: Zwei nebeneinander liegende Zahlen werden zusammengezählt zur darunterliegenden. Die höhere Spaltenzahl bleibt. (2)

6. a) (1) → (2) Multipl. mit $(b-a)$

(2) → (3) Linke Seite binomische Formel

(3) → (4) Ordnen: Terme mit b nach links, mit a nach rechts

(4) → (5) b bzw. a ausklammern

(5) → (6) Durch $(b-a-1)$ teilen (2)

b) $b-a-1$ ist Null. Durch Null darf man nicht teilen (1)