4. Übung, Lösungen

1. Die Tabelle rechts zeigt die Werte für Ausgangszahlen von 1 bis 46 (Spalte B). Spalte A gibt an, wie oft φ abgezogen werden kann, damit das Ergebnis gerade noch positiv ist. Also $B - A\cdot\varphi > 0$

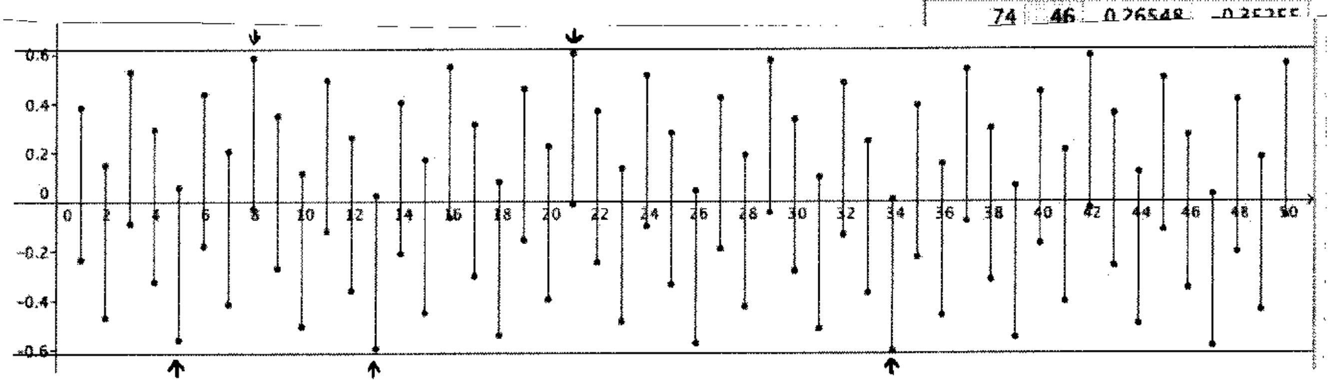
Das Ergebnis steht in Spalte C. Zieht man φ ein Mal mehr ab, ist das Ergebnis negativ.

Also $B - A\cdot\varphi = C > 0$

$$B - (A+1)\varphi = D < 0$$

In der grafischen Darstellung unten sind auf der waagerechten Achse die Ausgangszahlen (Spalte B) aufgetragen, senkrecht dazu die Werte aus Spalte C (oberer Punkt) ~~od~~ und D (unterer Punkt) und mit einer Linie verbunden. Hier kann man besonders

A	B	C	D
0.61803	1	0.38197	-0.23607
3	2	0.1459	-0.47214
4	3	0.52786	-0.09017
6	4	0.2918	-0.32624
8	5	0.05573	-0.56231
9	6	0.43769	-0.18034
11	7	0.20163	-0.41641
12	8	0.58359	-0.03444
14	9	0.34752	-0.27051
16	10	0.11146	-0.50658
17	11	0.49342	-0.12461
19	12	0.25735	-0.36068
21	13	0.02129	-0.59675
22	14	0.40325	-0.21478
24	15	0.16718	-0.45085
25	16	0.54915	-0.06888
27	17	0.31308	-0.30495
29	18	0.07701	-0.54102
30	19	0.45898	-0.15905
32	20	0.22291	-0.39512
33	21	0.60488	-0.01316
35	22	0.36881	-0.24922
37	23	0.13274	-0.48529
38	24	0.51471	-0.10333
40	25	0.27864	-0.33939
42	26	0.04257	-0.57546
43	27	0.42454	-0.1935
45	28	0.18847	-0.42956
46	29	0.57044	-0.0476
48	30	0.33437	-0.28367
50	31	0.0983	-0.51973
51	32	0.48027	-0.13777
53	33	0.2442	-0.37384
55	34	0.00813	-0.6099
56	35	0.3901	-0.22794
58	36	0.15403	-0.46401
59	37	0.53599	-0.08204
61	38	0.29993	-0.31811
63	39	0.06386	-0.55418
64	40	0.44582	-0.17221
66	41	0.20976	-0.40828
67	42	0.59172	-0.02631
69	43	0.35565	-0.26238
71	44	0.11959	-0.49845
72	45	0.50155	-0.11648
74	46	[illegible]	[illegible]

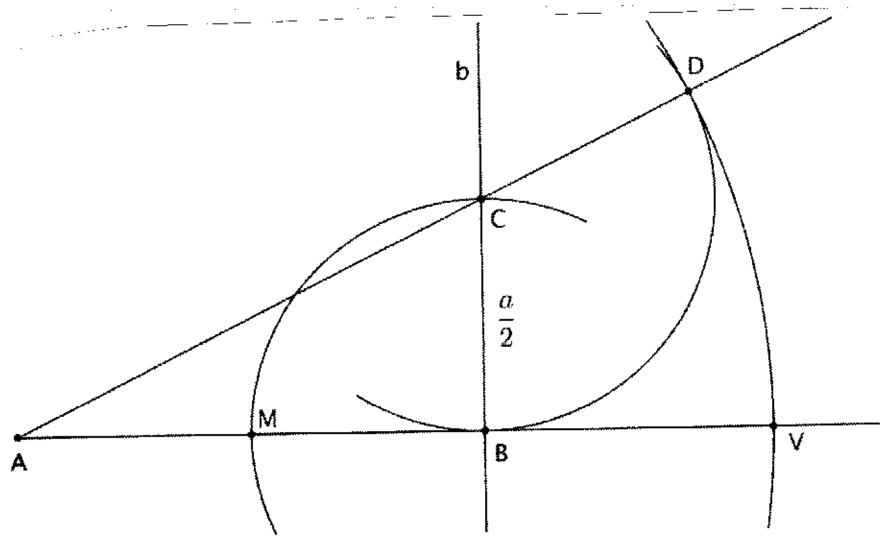


leicht die sehr guten Fälle erkennen. Liegt die Linie besonders hoch oder tief, ist ein Endpunkt besonders dicht bei Null.

Ergebnis. Ist die Ausgangszahl eine Fibonacci-Zahl, so ist der Faktor für φ die nächst größere Fibonacci-Zahl.

$$f_n - f_{n+1} \cdot \varphi \approx 0$$

2.



Man zeichnet in B die Senkrechte b zu $\overline{AB}$ und konstruiert den Mittelpunkt M zu $\overline{AB}$. Der Kreis um B mit dem Radius |BM| schneidet b in C. Die Strecke $\overline{BC}$ hat folglich die Länge $\frac{a}{2}$. Um C wird ein Kreis mit dem Radius |CB| gezeichnet, der den Strahl $\overline{AC}$ im Punkt D schneidet. Die Strecke $\overline{AD}$ hat bereits die gesuchte Länge, mit einem Kreis um A wird sieübertragen auf die Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus. $\overline{AV}$ ist dann die gesuchte goldene Verlängerung zu $\overline{AB}$.

$|AB| = a = 2 \cdot \frac{a}{2} \quad |BC| = 1 \cdot \frac{a}{2}$

Satz v. Pythagoras: $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$$|AC|^2 = \left(2 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(1 \cdot \frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 5$$

$|AC| = \frac{a}{2}\sqrt{5} \quad |CD| = \frac{a}{2} \quad$ also $|AD| = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2}$

$|AD| = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) = a\,\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad |AV| = |AD|$

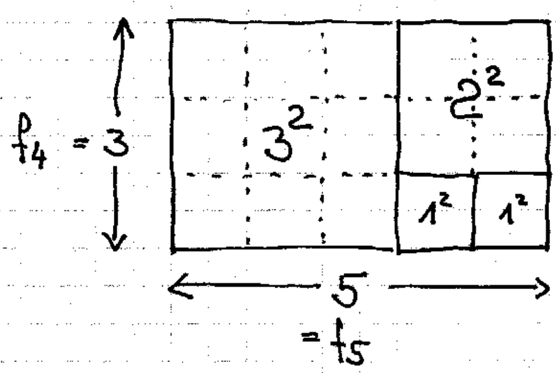
HAUSÜBUNGEN

3. b. $n = 4$ $\quad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = f_4 \cdot f_5$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \qquad 3 \cdot 5$

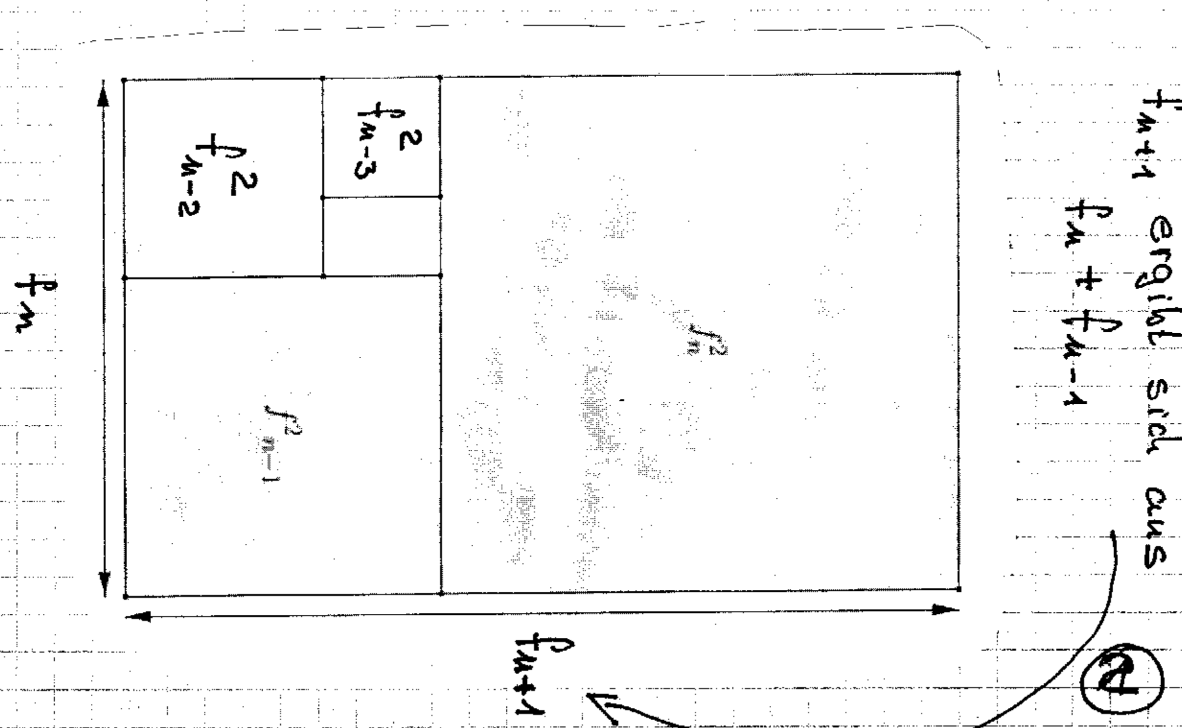
$= 1 + 1 + 4 + 9 \qquad = 15$

$= 15$ stimmt



1

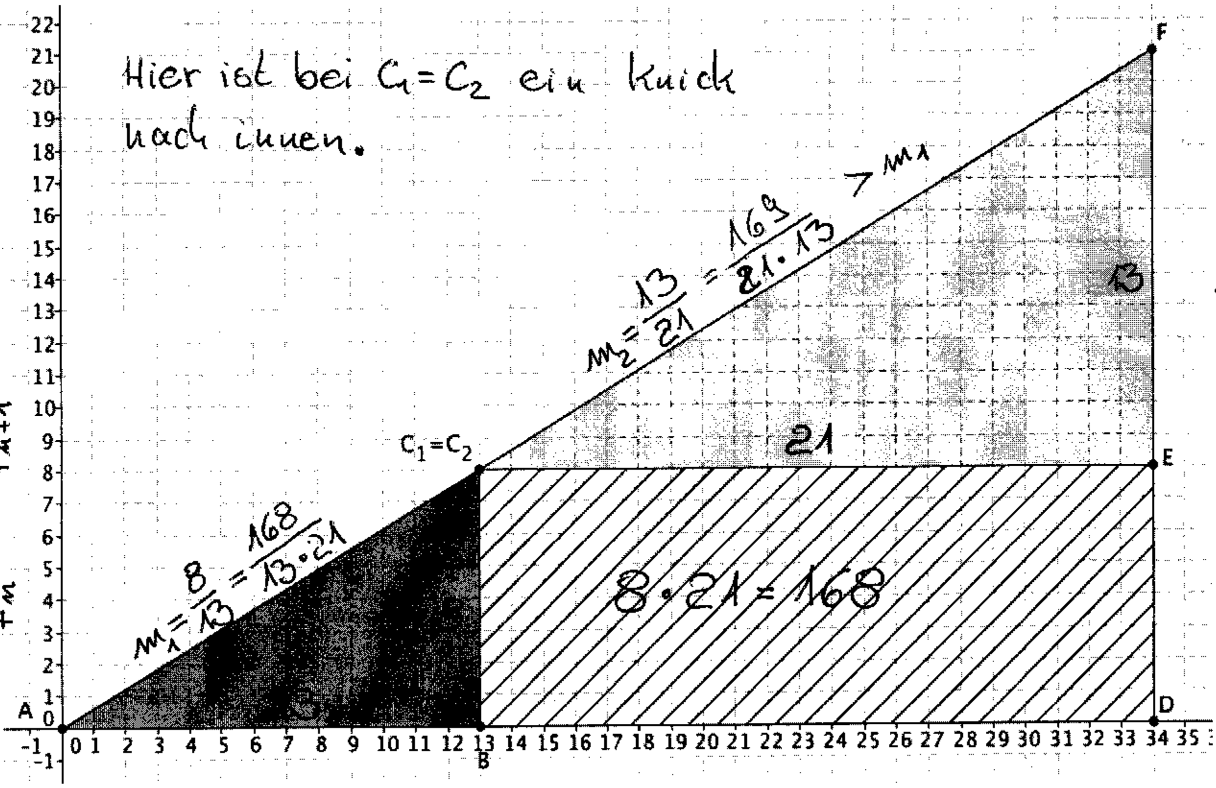
c



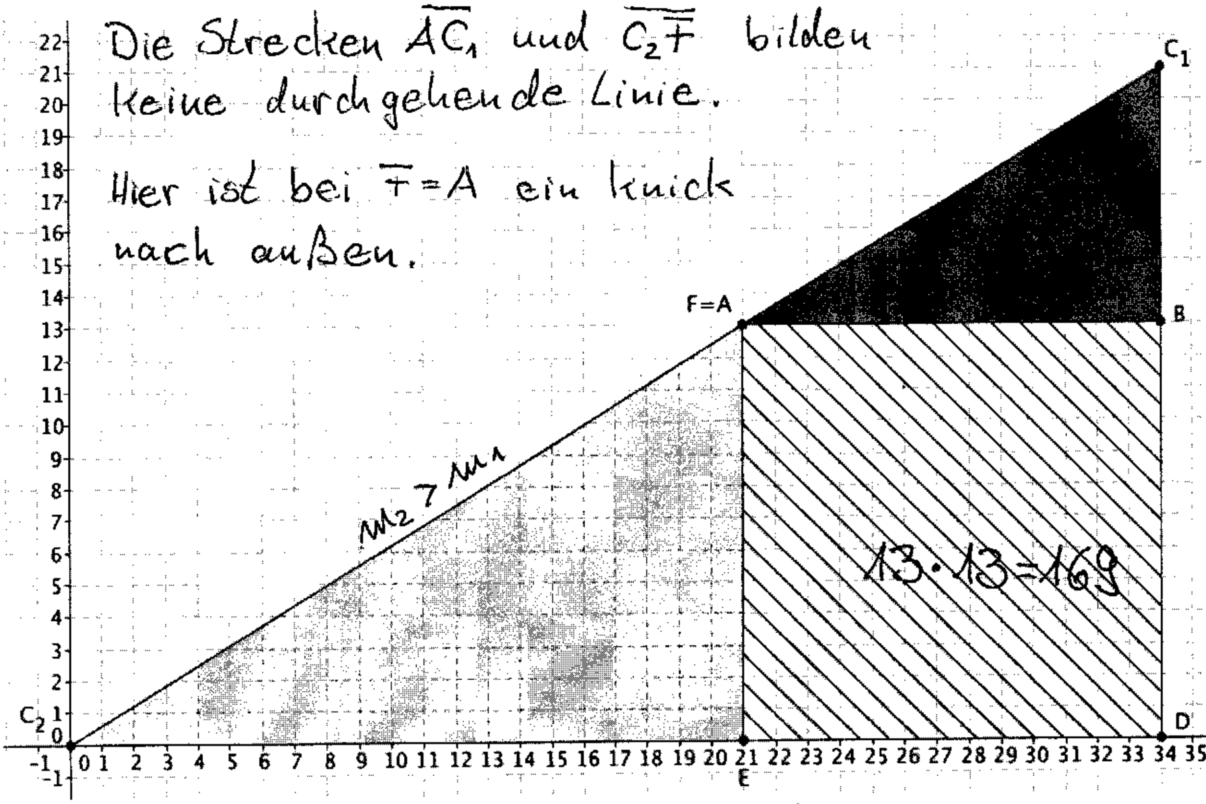
2

4. Flächenumwandlung

Die nachfolgenden beiden Abbildungen zeigen eine Flächenumwandlung, die missglückt ist. Ermitteln Sie zu beiden schraffierten Vierecken die Längenmaße und den Flächeninhalt. Was stimmt hier nicht? Wieso ist das so?



Steigungen ②



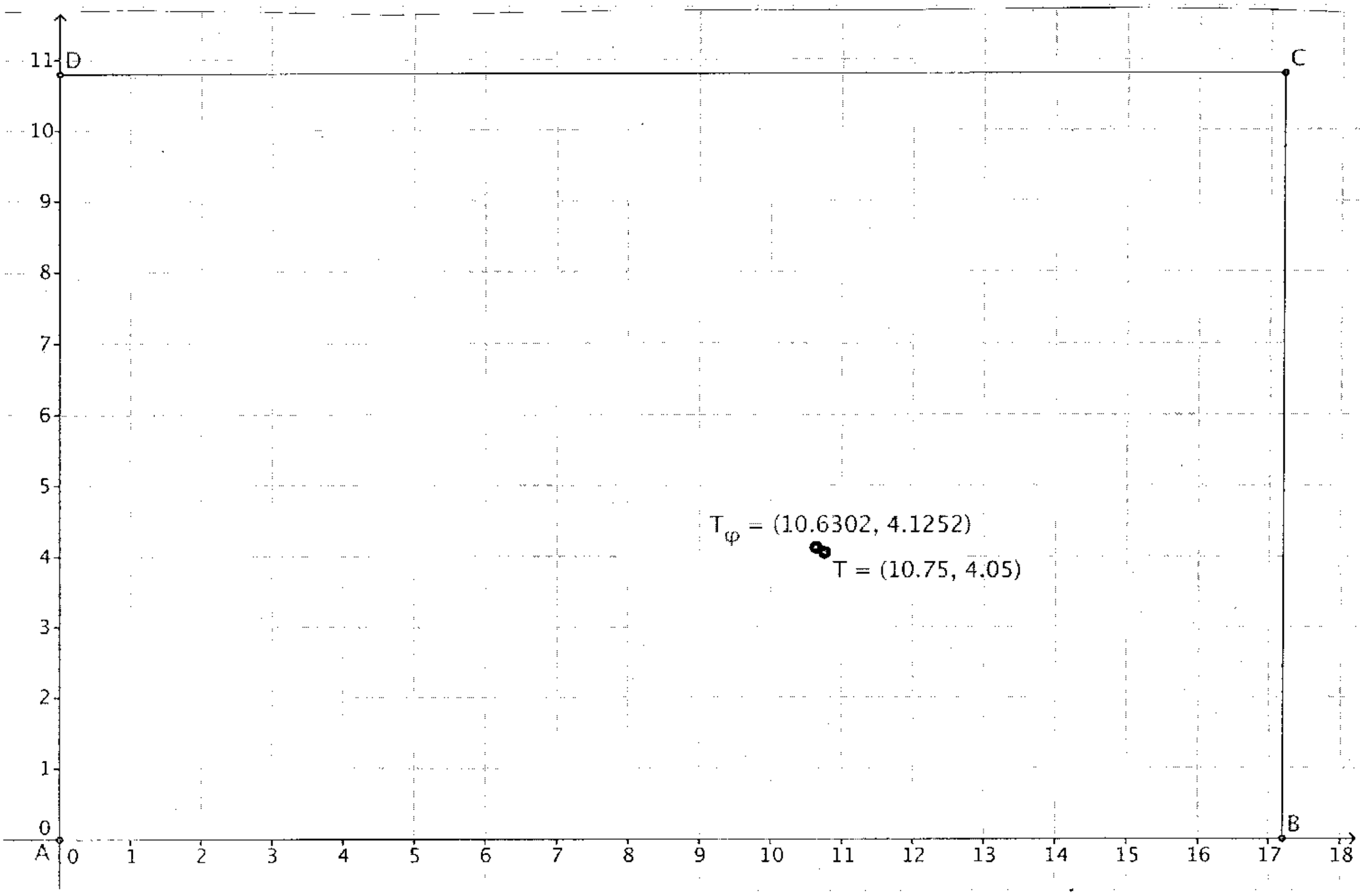
Flächenr. ①

Argument. ①

Die beteiligten Zahlen 8, 13, 21 sind Fibonacci-Zahlen. Für die gilt $\frac{F_{n-1}}{F_n} \approx \frac{F_n}{F_{n+1}}$

Durch den Knick nach außen passt in das Viereck C_2DC_1F, das kein Dreieck ist, eine Flächeneinheit mehr hinein als oben in das Viereck $ADFC_1$.

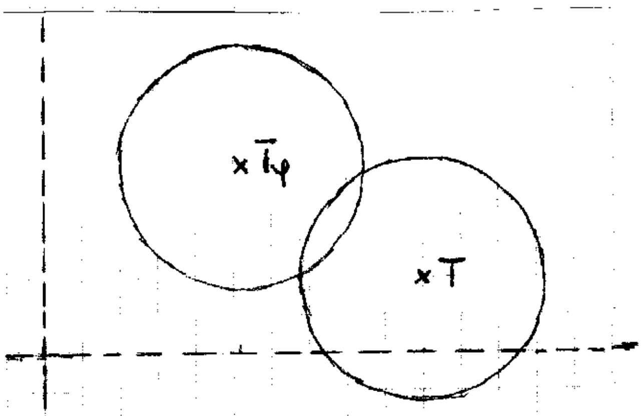
5. a. Gesamtbild 1:20



b. Die Koordinaten der Mittelpunkte sind

$T\ (215;\ 81)$ „Fälschung mit 3:5"

$T_\varphi\ (212{,}60;\ 82{,}50)$ bei echter Einteilung



Flecken in Originalgröße und Lage zueinander

80cm vom unteren Rand

210 cm vom linken Rand

6. a. linke S.: $f_{2n} \overset{n=9}{=} f_{18} = f_{16} + f_{17} = 987 + 1597$

$= 2584$

stimmt

rechte S.: $(f_{n-1} + f_{n+1}) f_n \overset{n=9}{=} (f_8 + f_{10}) f_9$

$= (21 + 55) \cdot 34 = 76 \cdot 34 = 2584$ 1

b. rechte S.: $2 f_{n-1} f_n + f_n^2 \overset{n=9}{=} 2 \cdot f_8 \cdot f_9 + f_9^2$

$= 2 \cdot 21 \cdot 34 + 34^2$

stimmt

$= 1428 + 1156 = 2584$ 1

c. $f_{2n} = (f_{n-1} + f_{n+1}) f_n \quad | \; f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ einsetzen

$= (f_{n-1} + f_n + f_{n-1}) f_n$

$= (2 f_{n-1} + f_n) f_n \quad |$ ausmultipl.

$= 2 f_{n-1} f_n + f_n^2$ 1

d. $n + 1 = 17 \Rightarrow n = 16$ also kann man die $2n = 32$-te Fibonaccizahl berechnen

$f_{32} = (f_{15} + f_{17}) f_{16} = (610 + 1597) \cdot 987$

$= 2207 \cdot 987 = \underline{\underline{2.178.309 = f_{32}}}$ 1

e. $f_n = \text{runden}(0{,}4472135955 \cdot 1{,}6180339887 5^n)$

$f_{32} = \text{runden}(2178309{,}0) = 2.178.309$

stimmt mit d überein 1