Dr. R. Albers   Mathem. Denken u. Lehren 1   WiSe 14/15

Übung 3. Lösungen

A3	A4	A5	A6	Σ
3	6	7	4	20

1. $\overline{AB}$ wird in Drittel geteilt.
Also ist $|CB| = |BE| = \frac{2}{3}d$
Dann gilt nach dem Satz v. Pythagoras

$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2$$
$$= \left(\frac{3}{3}d\right)^2 + \left(\frac{2}{3}d\right)^2 = 9\left(\frac{d}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{d}{3}\right)^2 = 13\left(\frac{d}{3}\right)^2$$

$$|AE| = \sqrt{13}\,\frac{d}{3}$$

$\overline{AF}$ ist wegen des Kreises um A so lang wie $\overline{AC}$, also $\frac{d}{3}$.

$$|FE| = |FA| + |AE| = \frac{d}{3} + \sqrt{13}\,\frac{d}{3} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}\,d$$

2a. Für ϕ gilt die definierende Gleichung
$$\phi^2 = \phi + 1 \quad (*)$$
Laut Zeichnung hat $\overline{BC}$ die Länge $\phi^2 - \phi$. Die ist wegen $(*)$ 1. $|BC| = 1$

b. Da $\overline{AC}$ mit ϕ gestreckt wurde, gilt
$$|B'C'| = \phi \cdot |BC| = \phi \cdot 1 = \phi$$
Also: $|A'C'| = |A'B'| + |B'C'|$
$$= |A'B| + |BB'| + |B'C'|$$
$$= \phi + 1 + \phi = \underline{\underline{2\phi + 1}}$$

c. $|A''C''| = |A''B''| + |B''C''|$
$$= |A'C'| + \phi \cdot |B'C'| = 2\phi + 1 + \phi^2$$
mit $(*)$ $= 2\phi + 1 + \phi + 1 = \underline{\underline{3\phi + 2}}$

2d. $A''B''C''$ wird mit dem Faktor ϕ gestreckt auf $A'''B'''C'''$

$$|A'''C'''| = \phi^5 = |A'''B'''| + |B'''C'''|$$
$$= \phi \cdot |A''B''| + \phi |B''C''|$$
$$= (3\phi + 2) + \phi(\phi + 1)$$
$$= 3\phi + 2 + \phi^2 + \phi$$
$$= 3\phi + 2 + \phi + 1 + \phi$$
$$\phi^5 = 5\phi + 3$$

$$|A^{(4)}C^{(4)}| = \phi^6 = |A^{(4)}B^{(4)}| + |B^{(4)}C^{(4)}|$$
$$= \phi |A'''C'''| + \phi |B'''C'''|$$
$$= 5\phi + 3 \quad + \phi(2\phi + 1)$$
$$= 5\phi + 3 \quad + 2\phi^2 + \phi$$
$$= 5\phi + 3 \quad + 2(\phi + 1) + \phi$$
$$\phi^6 = 8\phi + 5$$

Mit $F_1 = 1$ $F_2 = 1$ $F_3 = 2$ $F_4 = 3$ $F_5 = 5$ $F_6 = 8$

kann man vermuten

$$\phi^n = F_n \cdot \phi + F_{n-1}$$

HAUSÜBUNGEN

3 a. $(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b)$

$$\begin{aligned} = \; & a^3 + 2a^2b + ab^2 && \leftarrow \text{mit } a \\ & + a^2b + 2ab^2 + b^3 && \leftarrow \text{mit } b \\ \hline = \; & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

multiplie.

1

b. $(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)$

$$\begin{aligned} = \; & a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 && \leftarrow \text{mit } a \\ & + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 && \leftarrow \text{mit } b \\ \hline \end{aligned}$$

mult.

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \qquad 1$$

c. $$(a+b)^5 = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b)$$

$$\begin{aligned} &= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 \\ &\quad + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5 \\ \hline &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \qquad 1 \end{aligned}$$

4 a. Pythagoras: $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$$|AC|^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$\underline{\underline{|AC| = \sqrt{13}}} \qquad 1$$

b. Ebenso $|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2$

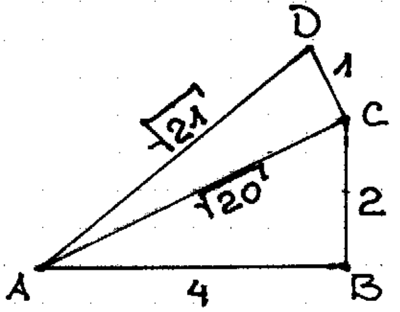
$$|AD|^2 = 13 + 1^2 = 14$$

$$\underline{\underline{|AD| = \sqrt{14}}} \qquad 1$$

c. Zerlegung $21 = 16 + 4 + 1$

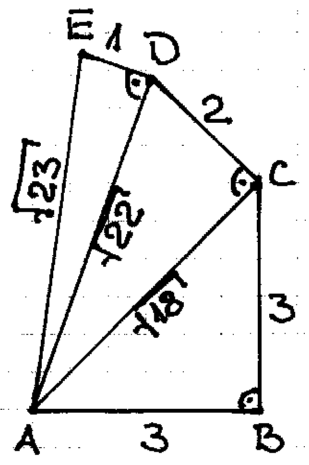
$$= 4^2 + 2^2 + 1^2$$

Danach erhält man die entsprechende Zeichnung



2

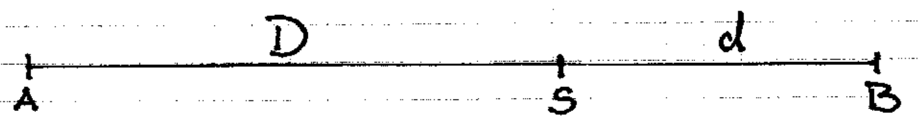
d. Man geht mit rechtwinkligen Dreiecken weiter. Die Katheten ergeben sich aus den Summanden.



2

5.

a.



Die Strecke $\overline{AB}$ soll durch S im „silbernen Schnitt" geteilt sein. Setzt man wieder $|AB| = 1$, so gilt: $D + d = 1$

Definition des „silbernen Schnitts"

$$\frac{D}{1} = 2 \cdot \frac{d}{D}$$ (2)

b. $d = 1 - D$ einsetzen

$$\frac{D}{1} = 2 \cdot \frac{1-D}{D} \quad | \cdot D$$

$$D^2 = 2(1-D) = 2 - 2D \quad | +2D - 2$$

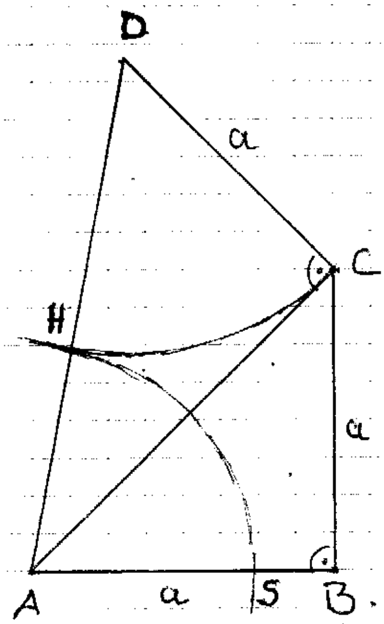
$$D^2 + 2D - 2 = 0$$

$$D = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$$ (2)

Geometrisch sinnvoll ist nur $D = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}732$

c.

1. Gegeben ist $\overline{AB}$ mit der Länge a
2. In B zeichnet man eine Senkrechte zu AB und trägt die Länge a ab. Man erhält C.



3. In C zeichnet man eine Senkrechte zu AC und trägt die Länge a ab. Man erhält D.
   $|AD| = a\sqrt{3}$
4. Man schlägt um D einen Kreis mit dem Radius $|DC| = a$. Er schneidet $\overline{AD}$ in H.
   $|AH| = a\sqrt{3} - a = a(\sqrt{3} - 1)$

→

5c) 5. Man schlägt um A einen Kreis mit dem Radius $|AH| = a(\sqrt{3}-1)$. Er schneidet $\overline{AB}$ in S. S teilt $\overline{AB}$ im „silbernen Schnitt", denn $\overline{AS}$ ist mit der Länge $|AS| = a(\sqrt{3}-1)$ der „Dicke" zur Länge a. 3

6. a. 1. Kreis um A mit Radius $|AB| = a$.
Er schneidet c in D.
Also ist $|AD| = a$
Dann ist $|AE| = \frac{a}{2}$

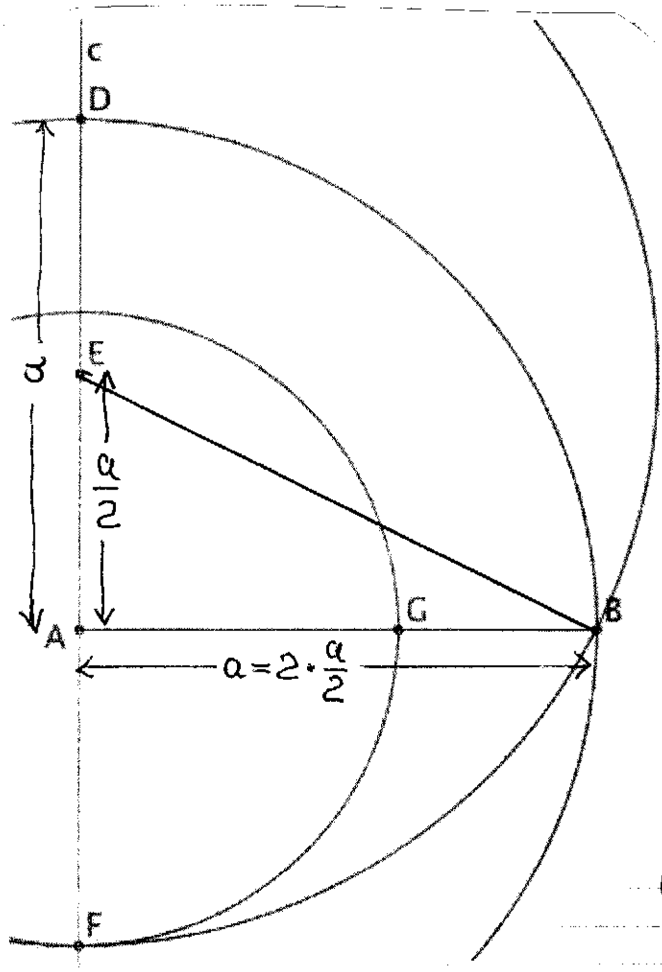
2. Kreis um E mit Radius $|EB|$.
Er schneidet c in F.

3. Kreis um A mit Radius $|AF|$.
Er schneidet $\overline{AB}$ in G. 1,5

b. Wegen $|AE| = \frac{a}{2}$
und $|AB| = 2 \cdot \frac{a}{2}$
ist $|EB| = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.
Also ist auch
$|EF| = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

$$|AF| = |EF| - |EA|$$
$$= \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$$
$$= \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$
$$= a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Major für Gold. Schnitt



2,5