Dr. R. Albers   Mathem. Denken u. Lehren 1   WiSe 14/15

Übung 2 Lösungen

Summe	Aufg.	3	4	5	6	7
21	Punkte:	2	11	3	3	2

1. $$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(1+\sqrt{5})^4 = 1 + 4\cdot\sqrt{5} + 6\cdot 5 + 4\cdot\sqrt{5}^3 + \sqrt{5}^4$$
$$= 1 + 4\sqrt{5} + 30 + 4\cdot 5\cdot\sqrt{5} + 5\cdot 5$$
$$= 1 + 30 + 25 + 4\sqrt{5} + 20\sqrt{5}$$
$$= 56 + 24\sqrt{5}$$
Also: $k_1 = 56 \quad k_2 = 24$

2 a. $$\varphi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)^2 = \frac{1}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1)$$
$$= \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$
$$\varphi^2 + \varphi = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1 \checkmark$$

b. i. $$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{4}(\sqrt{5}+1) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$
$$1+\varphi = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}$$
stimmt

ii $$\varphi^2 + \varphi = 1 \quad | :\varphi \quad \to \quad \varphi + 1 = \frac{1}{\varphi}$$

c. i. $$\varphi^3 \approx 0{,}618034^3 \approx 0{,}236068$$
$$2\varphi - 1 \approx 2\cdot 0{,}618034 - 1 \approx 0{,}236068$$
stimmt

ii. $$\varphi^2 + \varphi = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi^2 = 1 - \varphi$$
$$\varphi^3 = \varphi^2\cdot\varphi = (1-\varphi)\cdot\varphi = \varphi - \varphi^2$$
$$= \varphi - (1-\varphi) = \varphi - 1 + \varphi = 2\varphi - 1$$

HAUSÜBUNGEN

3. (1) -> (2) Bei den hinteren beiden Termen wurde $(n+1)$ ausgeklammert

   (2) -> (3) $n(n+1)$ ausklammer (Die Letzte Klammer in (2) ist einfach n)

   (3) -> (4) $\frac{1}{3}$ wird in die klammer multipliziert und $1 \to \frac{3}{3}$.

   (4) -> (5) Die Drittel werden zusammengefasst

   (5) -> (6) $\frac{1}{3}$ wird ausgeklammert 2

4. a.

	4	7	11	18	29	47	
+1	5	7	12	19	31	50	+3
−1	3	7	10	17	27	44	−3
−1	2	7	9	16	25	41	−3

Eine Veränderung der ersten Zahl wirkt sich um das 3-fache in der 6. Zahl aus. 1

b.

4		7	11	18	29	47	
4	+1	8	12	20	32	52	+5
4	−1	6	10	16	26	42	−5

Eine Veränderung der zweiten Zahl wirkt sich um das 5-fache in der 6. Zahl aus. 1

c. Grundüberlegung: Eine Veränderung um das 3-fache und um das 5-fache können sich ausgleichen bei einer Veränderung um $3 \cdot 5 = 15$ (kleinstes gemeinsames Vielfache) Also kann man eine Veränderung um 5 bei der ersten Zahl ausgleichen durch die entgegengesetzte Veränderung der zweiten Zahl um 3.

+5	5	11	16	27	43	70	+15
	10	11	21	32	53	85	
-3	10	8	18	26	44	70	-15

2

d. Das Verfahren aus c. wendet man systematisch wiederholt an.

+5	5	11	16	27	43	70	-3
	10	8	18	26	44	70	
	15	5	20	25	45	70	
	20	2	22	24	46	70	

Verringert man die 5 um 5, so kommt man auf

0 14 14 28 42 70

Lässt man 0 als natürliche Zahl zu, ist das auch noch eine Lösung. 2

Mehr Lösungen kann es nicht geben, denn jede weitere Veränderung mit 5er oder 3er-Schritten ergibt negative Startzahlen. 1

e. Schreibt man die gemeinsame Veränderung um 5 bzw. 3 allgemein auf, kommt man auf

$\underbrace{5+5k}_{1.\text{Zahl}} \quad \underbrace{11-3k}_{2.\text{Zahl}} \qquad k \in \mathbb{Z}$

Beispiel: $k = 5$

30 -4 26 22 48 70

allgemeine Rechnung

$5+5k \quad 11-3k \quad 16+2k \quad 27-k \quad 43+k \quad 70$ 2

f. Wählt man in e. für das k eine nicht ganze Zahl, so erhält man nicht ganze Startzahlen. z.B. $k = 0{,}3$

6,5 10,1 16,6 26,7 43,3 70

oder $k = -\frac{1}{4}$

$3\frac{3}{4}$ $11\frac{3}{4}$ $15\frac{1}{2}$ $27\frac{1}{4}$ $42\frac{3}{4}$ 70 (2)

5. $f_n^2 - 3 \overset{n=4}{=} f_4^2 - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

$f_{n-3}^2 = f_1^2 = 1^2 = 1$

$f_{n^2-3} = f_{16-3} = f_{13} = 233$

$f_{n^2} - 3 = f_{16} - 3 = 987 - 3 = 984$

$f_{n-3^2} = f_{4-9} = f_{-5}$ gibt es nicht

$f_{(n-3)^2} = f_{(4-3)^2} = f_1 = 1$ je $\frac{1}{2}$ (3)

6. Die Formel heißt

$f_{n+m} = f_{n-1} \cdot f_m + f_n f_{m+1}$

a) Für $m = 4$ erhält man

$f_{n+4} = f_{n-1} \cdot f_4 + f_n f_5$ mit $f_4 = 3$ und $f_5 = 5$

erhält man $f_{n+4} = 3 f_{n-1} + 5 f_n$ (1,5)

b) Beweis der letzten Formel

$3 f_{n-1} + 5 f_n = 3(f_{n-1} + f_n) + 2 f_n$

$= 3 f_{n+1} + 2 f_n = f_{n+1} + 2(f_{n+1} + f_n)$

$= f_{n+1} + 2 f_{n+2}$

$= f_{n+3} + f_{n+2} = f_{n+4}$ q.e.d. (1,5)

7. Angenommen, es würden zwei gerade Fibonacci-Zahlen aufeinander folgen. Dann wäre auch die nächste Fibonacci-Zahl gerade, denn „gerade plus gerade ist gerade". Ebenso wäre auch die vorhergehende Fibonacci-Zahl gerade, denn aus $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ folgt $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ und „gerade minus gerade ist gerade". Setzt man das fort, müssten alle vorhergehenden Fibonacci-Zahlen gerade sein, insbesondere auch die Startzahlen. Die Startzahlen sind aber 1 und damit ungerade.
Also können nie zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen gerade sein. 2