Dr. R. Albers Mathem. Denken und Lehren 1 WiSe 14/15

Übung 1, Lösungen

PRÄSENZÜBUNGEN

1\. a. $$\frac{5^{n+1}-1}{4}-1=\frac{5^{n+1}-1-4}{4}=\frac{5^{n+1}-5}{4}$$

$$=\frac{5(5^{n}-1)}{4}=\frac{5}{4}(5^{n}-1)$$

b. (1) → (2) (n+1) wird ausgeklammert

(2) → (3) In der eckigen Klammer

Vor dem + wird n in die Klammer mult.

hinter dem + wird die Klammer weggelassen und

+1 − 1 zu 0 zusammengefasst

(3) → (4) $\frac{1}{3}$ ausklammern, das führt am Ende

der eckigen Klammer zu $n \to 3n$

(4) → (5) i.d. eckigen Klammer werden die n's

zusammengezählt

(5) → (6) aus der [ ] wird n ausgeklammert

c. $$\frac{1}{1+\sqrt{\frac{3}{4}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{4-3}=4-2\sqrt{3}$$

2\. n steht für die mittlere der drei Zahlen.

n−1 ist die Zahl davor, n+1 die danach.

3 a) z.B. 42 → Quersumme ist $4+2=6$

$42-6=36 \quad 36:9=4$ also teilbar

Ergebnis 4 ist Zehnerziffer von 42.

b) Zweistellige Zahl mit Zehnerziffer a und Einerziffer b: $10a+b$

Quersumme: $a+b$

Differenz von beiden: $10a+b-(a+b)$

$= 10a+b-a-b = 9a$

Die Differenz ist das Neunfache der Zehnerziffer a. Teilt man $9a$ durch 9, was immer aufgeht, so ist das Ergebnis a.

c) Dreistellige Zahl mit Hunderterziffer a, Zehnerz. b und Einerziffer c: $100a+10b+c$

Quersumme: $a+b+c$

Differenz „Zahl − Quersumme":

$$100a+10b+c-(a+b+c) = 99a+9b$$
$$= 9(11a+b)$$

Da man 9 ausklammern kann und $11a+b$ eine ganze Zahl ist, ist ~~das Ergebnis~~ die Differenz immer durch 9 teilbar. Das Divisionsergebnis $11a+b$ ist nicht so übersichtlich.

Beispiel $452-(4+5+2) = 441 = 9 \cdot 49$

Das Divisionsergebnis 49 ist $11 \cdot \underset{\text{Hunderter}}{4} + \underset{\text{Zehner}}{5}$

Damit die Differenz auch durch 99 teilbar ist, muss sie durch 9 und zusätzlich durch 11 teilbar sein. Also muss $11a+b$ durch

11 teilbar sein. Das ist nur für $b=0$ der Fall.

Beispiel für $b \neq 0$: $452-(4+5+2)=441=9\cdot 49$

441 ist durch 9 teilbar, aber nicht durch 11.

Beispiel für $b=0$: $402-(4+0+2)=396=9\cdot 44 = \underbrace{9\cdot 11}\cdot 4$

Das Divisionsergebnis ist 44,

und 44 kann man durch 11 teilen.

Also kann man 396 durch 99 teilen: $396 = 99\cdot 4$

HAUSÜBUNGEN

4a.

$3\cdot 3=9$	$4\cdot 4=16$	$5\cdot 5=25$	Es kommt noch
$2\cdot 4=8$	$3\cdot 5=15$	$4\cdot 6=24$	eine Aufgabe dazu,
$1\cdot 5=5$	$2\cdot 6=12$	$3\cdot 7=21$	
	$1\cdot 7=7$	$2\cdot 8=16$	
		$1\cdot 9=9$ ←	denn bei $1\cdot\ldots$ 1
			hört die Spalte auf 1

b.

$6\cdot 6=36$	$7\cdot 7=49$		
$5\cdot 7=35$	$6\cdot 8=48$	-1	erkennbare
$4\cdot 8=32$	$5\cdot 9=45$	-3	Systematik
$3\cdot 9=27$	$4\cdot 10=40$	-5	
$2\cdot 10=20$	$3\cdot 11=33$	-7	
$1\cdot 11=11$	$2\cdot 12=24$	-9	
	$1\cdot 13=13$	-11	1

c.

$$n\cdot n = n^2$$
$$(n-1)(n+1) = n^2-1$$
$$(n-2)(n+2) = n^2-4$$
$$(n-3)(n+3) = n^2-9$$
$$\ldots$$
$$1\cdot(n+n-1) = 2n-1 = n^2-(n-1)^2$$ 1

d. Es geht hier um die 3. Binomische Formel. 1

e. In der 1. Spalte ist die oberste Aufgabe $3\cdot 3$, in der 2. Spalte $4\cdot 4$, in der 3. Spalte $5\cdot 5$. Man zählt also zur Spaltennummer immer 2 dazu, um die oberste Aufgabe zu ermitteln. Allgemein: k. Spalte oberste Aufgabe ist $(k+2)\cdot(k+2)$. Also beginnt die 80. Spalte mit $82\cdot 82$ in der 1. Zeile. 1

2 Zeile: $81\cdot 83$, 3. Zeile $80\cdot 84$, 4. Zeile $79\cdot 85$

Allgemein: i. Zeile $\big(82-(i-1)\big)\cdot\big(82+(i-1)\big)$

Also steht in der 30. Zeile: $53\cdot 111$ 1

5. Sei A die Anzahl der Hähne
E " " " Hennen
und K " " " Küken

a) Dann muss für das ausgegebene Geld gelten:

$$A\cdot 5 + E\cdot 3 + K\cdot 1 = 100$$

Der Bauer kann höchstens 20 Hähne, 33 Hennen oder 100 Küken kaufen.

Nun gibt man eine geringere als die Höchstzahl bei den Hähnen und Hennen vor, z.B. $\underline{\underline{A=10}}$ und $\underline{\underline{E=10}}$. Dann rechnet man aus, wie viele Geldstücke ausgegeben wurden.

$10\cdot 5 + 10\cdot 3 = 80$

Der Rest kann dann in Küken investiert werden. Das geht immer auf, da ein Küken 1 Geldstück kostet.

$100-80=20$, also $\underline{\underline{20 \text{ Küken}}}$ 1

b) Doppelt so viele Küken wie Hähne heißt

$k = 2 \cdot A$ Einsetzen i.d. Gleichung:

$$A \cdot 5 + E \cdot 3 + 2 \cdot A \cdot 1 = 100$$

$$7A + 3E = 100$$

Das ist schwieriger zu lösen, denn wenn man die Hähne vorgibt, muss der Rest durch 3 teilbar sein, damit er restlos für die Hennen ausgegeben werden kann.

systematisches Probieren

	A	k=2A	7A	100−7A	E	
	1	2	7	93	31	
+3	2	4	14	86	geht nicht	−7
	3	6	21	79	"	
	4	8	28	72	24	
	5	10	35	65	geht nicht	
+3	6	12	42	58	"	−7
	7	14	49	51	17	
	10	20			10	
	13	26			3	

2

Es gibt also insgesamt 5 Lösungen. +1

6. a. $r = b + 12$, $r - 12 = b$ und $r - b = 12$ sind richtig (äquivalente Gleichungen) 1

b. $r = 3b$ ist richtig 0,5

c. Die beiden Gleichungen $r = b + 12$ und $r = 3b$ kann man gleichsetzen: $b + 12 = 3b$

$\Rightarrow 2b = 12 \Rightarrow b = 6$, also $r = 18$

$r = 18$ sind 12 mehr als $b = 6$ und das Dreifache von $b = 6$.

1,5

7. a. $a + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$

b. $a - 2 = n + 1 - 2 = n - 1$

c. $2a = 2(n+1) = 2n + 2$

d. $3a + 1 = 3(n+1) + 1 = 3n + 4$

je Fehler −0,5

e. $a^2 = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

f. $(a+1)a = (n+1+1)(n+1) = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2$

g. $(a-1)(a+1) = (n+1-1)(n+1+1) = n(n+2) = n^2 + 2n$

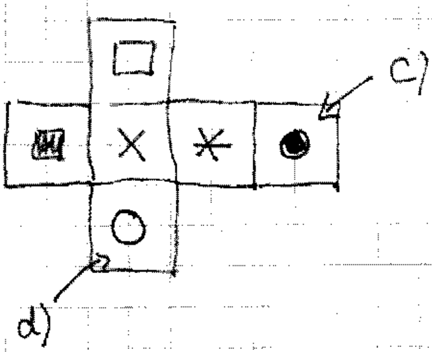
3

8.

1. Es sind a) e) f) h)

1

2.



Erst mit d) ○ festlegen,
dann mit c) ◉ festlegen,
dann b) und g) auswerten

1

A4	A5	A6	A7	A8	Σ
7	3	3	3	2	18