Zur Eulerschen Vermutung (vierte Potenz)

Eine mathematische Episode,
erzählt anlässlich eines Besuches in Bremen

Der Direktor des Max Planck Instituts für Mathematik in Bonn, *Don Zagier*, berichtet in einem Artikel anlässlich eines Besuches in Bremen (JUB, 2011):

Im Wintersemester 1986 war er am Mathematical Sciences Research Institute (MSRI) Berkeley. Dort hielt er einen fachlich-allgemeinen Vortrag und traf einen Herrn de Vogelaere, der ihn auf folgende Zerlegung aufmerksam machte:

$$\left(x^2+x+1\right)^4 = x^4+\left(x+1\right)^4+\left(x^4+2x^3+3x^2+2x\right)^2$$ Escott, 1895

$$x^8 + 4x^7 + 10x^6 + 16x^5 + 19x^4 + 16x^3 + 10x^2 + 4x + 1$$

Von dieser Art hatte er noch weitere gefunden:

$$\left(9x^2+3x+3\right)^4=\left(8x^2+x+1\right)^4+\left(4x^2-x+2\right)^4+\left(47x^4+74x^3+49x^2+22x+8\right)^2$$

$$6561\ x^8\ +\ 8748\ x^7\ +\ 13122\ x^6\ +\ 9720\ x^5\ +\ 7371\ x^4\ +\ 3240\ x^3\ +\ 1458\ x^2\ +\ 324\ x\ +\ 81$$

aber auch:

$$\left(2.577.229.375x^2-1.371x+3525\right)^4=\left(2.232.368.805x^2+1.861.583x-2980\right)^4+\left(968.648.234x^2+4.964.967x-1400\right)^4+\left(...\right)^2$$

Herr de Vogelaere fragte, ob man diese Zerlegungen für eine systematische Suche nach Lösungen für die Eulersche Vermutung (4.Potenzen) nutzen könne.
Don Zagier sagte, dass er das verfolgen wolle.

Er arbeitete immer mal wieder, aber nicht sehr intensiv, an dem Problem. Ende 1987 ging er für einen zweimonatigen Aufenthalt nach Moskau. Auch dort griff er wieder das Problem auf und kondensierte es auf die Frage:

$$184\cdot 233^2u^4+320.922\cdot 233u^3v+130.661.741u^2v^2+320.922\cdot 313uv^3+184\cdot 313^2v^4$$

Gibt es Einsetzungen für *u* und *v*, so dass das Ergebnis eine Quadratzahl ist? Dabei waren für *u* und *v* nur zweistellige Zahlen zu probieren.

Zu der Zeit gab es in Moskau keine Personalcomputer und die vorhandenen Computer waren Gästen nicht zugänglich. Don Zagier hatte nur einen Taschenrechner bei sich, der aber nur 13-stellige Zahlen genau verarbeitete.
Er zog tatsächlich in Erwägung, einige vielversprechende Möglichkeiten handschriftlich zu berechnen.

Dann entschied er, dass ein Problem, das nun 200 Jahre auf eine Lösung gewartet hatte, auch noch ein paar Wochen warten könne.

Ein schwerer Fehler.

Als er nach dem Aufenthalt in Moskau nach Bonn zurückkehrte, musste er erfahren, dass ein junger Student aus Havard (Noam Elkies, 22 Jahre alt) für die Eulersche Vermutung (4. Potenzen) eine Lösung gefunden und veröffentlicht hatte.

Don Zagier eilte zum Institutscomputer, startete die Suche, die er in Moskau nicht durchführen konnte und fand innerhalb von Sekunden, dass die Einsetzung von u = 61 und v = 5 in die Formel

$$\begin{aligned}
&184 \cdot 233^2 u^4 + 320.922 \cdot 233 u^3 v + 130.661.741 u^2 v^2 + 320.922 \cdot 313 u v^3 + 184 \cdot 313^2 v^4 \\
&= 184 \cdot 233^2 \cdot 61^4 + 320.922 \cdot 233 \cdot 61^3 \cdot 5 + 130.661.741 \cdot 61^2 \cdot 5^2 + 320.922 \cdot 313 \cdot 61 \cdot 5^3 + 184 \cdot 313^2 \cdot 5^4 \\
&= 138.308.542.617.016 + 84.862.323.901.530 + 12.154.808.456.525 + 765.920.468.250 + 11.266.435.000 \\
&= 236.102.861.878.321 \\
&= 15365639^2
\end{aligned}$$

eine Quadratzahl ergibt.

Damit hatte er eine Lösung für die Eulersche Vermutung im Fall der vierten Potenzen gefunden, nämlich

$$20.615.673^4 = 18.796.760^4 + 2.682.440^4 + 15.365.639^4$$

Das war die Lösung, die Noam Elkies wenige Tage zuvor veröffentlicht hatte.