3. Stellenwertsysteme

3.1 Was ist ein Stellenwertsystem?

3.2 Andere Basissysteme

3.3 Teilbarkeitsregeln

3.4 Teilbarkeitsregeln in anderen Basissystemen

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie sich die Teilbarkeitsregeln auf andere Stellenwertsysteme übertragen lassen.
Wir beginnen mit der Quersummenregel für die Zahl 9 im Zehnersystem. Dazu stellen wir hier noch einmal heraus, was denn eigentlich die Ursache für ihr Funktionieren im Zehnersystem darstellt. Alles beruht auf der Kongruenz
$10 \equiv 1 (\mathrm{mod} 9)$.
Hieraus folgt
$10^2 = 10 \cdot 10 \equiv 1 \cdot 10 = 10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$
$10^3 = 10^2 \cdot 10 \equiv 1 \cdot 10 = 10 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$
und allgemein $10^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 9)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es folgt
$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{10} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$
$\equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot 1 \ (\mathrm{mod}\ 9)$
$\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \equiv Q(a_n a_{n-1} \cdots a_1\ a_0)_{10} \ (\mathrm{mod}\ 9)$.
Die Zahl $(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_{10}$ und ihre Quersumme haben also bezüglich 9 denselben Rest. Insbesondere ist eine Zahl genau dann durch 9 teilbar, wenn auch ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Diese Überlegungen lassen sich ohne nennenswerte Änderungen auf jedes andere Stellenwertsystem übertragen. An die Stelle der 9 bei der Basis $b = 10$ tritt die Zahl $b - 1$ bei der Basis b .
(Und ab hier können wir abschreiben.)
Alles beruht auf der Kongruenz $b \equiv 1 (\mathrm{mod}\ b - 1)$. Diese trifft zu, da b beim Teilen durch $b - 1$ einen Rechst von 1 lässt.
$b = 1 \cdot (b - 1) + 1$
Hieraus folgt dann
$b^2 = b \cdot b \equiv 1 \cdot b = b \equiv 1 (\mathrm{mod}\ b - 1)$
$b^3 = b^2 \cdot b \equiv 1 \cdot b = b \equiv 1 (\mathrm{mod}\ b - 1)$
und allgemein $b^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ b - 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es folgt
$(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot b^1 + a_0 \cdot b^0$
$\equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot 1 \ (\mathrm{mod}\ b - 1)$

$\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{b-1}$

$\equiv Q(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b \pmod{b-1}$.

Die Zahl $(a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0)_b$ und ihre Quersumme haben also bezüglich $b-1$ denselben Rest. Insbesondere ist eine Zahl genau dann durch $b-1$ teilbar, wenn auch ihre Quersumme durch $b-1$ teilbar ist.

Da $b \equiv 1 \pmod{b-1}$ Ausgangspunkt all dieser Überlegungen war, gilt die Quersummenregel für alle Zahlen h mit $b \equiv 1 \pmod{h}$. Dies sind genau die Teiler von $b-1$.

Machen wir dazu ein Beispiel: Die Simpsons in Springfield haben nur vier Finger an jeder Hand. Daher werden dort Zahlen natürlich im Achtersystem geschrieben und Lisa lernt in der Schule die Teilbarkeitsregel: „Eine Zahl (im Achtersystem) ist durch 7 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 7 teilbar ist.“

Gehen wir das Einmaleins der 7 durch:

$7_{10} = 7_8$, $Q(7)_8 = 7$	$14_{10} = 16_8$, $Q(16)_8 = 1+6 = 7$
$21_{10} = 25_8$, $Q(25)_8 = 2+5 = 7$	$28_{10} = 34_8$, $Q(34)_8 = 3+4 = 7$
$35_{10} = 43_8$, $Q(43)_8 = 4+3 = 7$	$42_{10} = 52_8$, $Q(52)_8 = 5+2 = 7$
$49_{10} = 61_8$, $Q(61)_8 = 6+1 = 7$	$56_{10} = 70_8$, $Q(70)_8 = 7+0 = 7$
$63_{10} = 77_8$, $Q(77)_8 = 7+7 = 14$	$70_{10} = 106_8$, $Q(106)_8 = 1+0+6 = 7$

Wir sehen an diesen Beispielen, dass die Regel erfolgreich arbeitet.

Halten wir fest

> *b*-1 Regel
> Für Zahlen, geschrieben im *b*-System, gilt für *b*-1 die Quersummen-regel „Eine Zahl ist durch *b*-1 teilbar, wenn die Quersumme durch *b*-1 teilbar ist.“
> Die Quersummenregel gilt auch für alle Teiler von *b*-1.

Anwendung im Zehnersystem: 9 und 3

Als Nächstes sehen wir uns die alternierende Quersummenregel für die Zahl 11 im Zehnersystem an. Hier geht alles von der Kongruenz
$10 \equiv (-1) \pmod{11}$ aus.

Dieses hat $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zur Folge.

Daher tauchen bei der gewichteten Quersumme abwechselnd die Gewichte -1 und $+1$ auf.

Auch diese Teilbarkeitsregel lässt sich nahtlos auf jedes andere Basissystem übertragen.

Es gilt die Kongruenz $b \equiv (-1) \pmod{b+1}$. Denn die Differenz der beiden Zahlen ist $b-(-1) = 1\cdot(b+1)$ und damit durch $b+1$ teilbar.

Dann gilt weiterhin
$b^2 = b \cdot b \equiv (-1)\cdot(-1) = +1 \pmod{b+1}$.

Die Zahl $(a_n\, a_{n-1} \cdots a_1\, a_0)_b$ und ihre alternierende Quersumme haben also bezüglich $b+1$ denselben Rest. Insbesondere ist eine Zahl genau dann durch $b+1$ teilbar, wenn auch ihre alternierende Quersumme durch $b+1$ teilbar ist. Gleiches gilt für alle Teiler von $b+1$.

Nun wird in jedem Basissystem die Zahl b+1 als 11_b geschrieben, so dass wir von einer Elferregel reden können.

b +1 Regel (Elferregel)
Für Zahlen, geschrieben im b-System, gilt für $b+1=11_b$ die alternierende Quersummenregel „Eine Zahl ist durch $b+1=11_b$ teilbar, wenn die alternierende Quersumme durch $b+1=11_b$ teilbar ist.“
Die Quersummenregel gilt auch für alle Teiler von b-1.

Anwendung im Zehnersystem: 11

Beispiel im Achtersystem
Dort ist $b+1=11_b=8+1=9_{10}$. Wandeln wir die Zahlen des Einmaleins der 9 um in das Achtersystem, so erkennen wir:
$18_{10}=22_8$ $27_{10}=33_8$ $36_{10}=44_8$ $45_{10}=55_8$ $54_{10}=66_8$
Im Achtersystem erhält man zweistelligen Schnapszahlen, die offensichtlich durch $9_{10}=11_8$ teilbar sind. Nehmen wir eine größere, durch 9 teilbare Zahl, z.B. $900_{10}=1604_8$. Zur Zahl im Achtersystem berechnen wir die alternierende Quersumme: 4 – 0 + 6 – 1 = 9 =11_8 , die offensichtlich durch $9_{10}=11_8$ teilbar ist.

Nun betrachten wir die Endstellenregeln, die sich auf eine verschiedene Anzahl von Endstellen beziehen können. Beginnen wir mit der Teilbarkeit durch b. Die Zahl $\left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b$ ist ausführlich ausgeschrieben $a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$. Hier kann man bis auf die Einerstelle bei allen Stellen b ausklammern:
$\left(a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \ldots + a_2 b^1 + a_1\right) b + a_0$.
Hieraus sieht man, dass für die Ausgangszahl gilt:
$\left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b \equiv a_0 \left(\operatorname{mod} b\right)$. Der Teilungsrest der Ausgangszahl $\left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b$ beim Teilen durch b wird also allein von a_0 bestimmt. Dieser ist nur dann 0, also die Ausgangszahl $\left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b$ teilbar durch b, wenn $a_0=0$ gilt. Denn 0 ist die einzige Ziffer (Zahlen von 0 bis b-1), die durch b teilbar ist. Für alle Teiler t von b reicht es aus, wenn a_0, also die letzte Ziffer, durch den Teiler t teilbar ist.

b Regel
Für Zahlen, geschrieben im b-System, gilt für b die einfache Endstellenregel „Eine Zahl ist durch b teilbar, wenn die letzte Ziffer durch b teilbar ist.“ (Bei b selbst heißt das, dass die letzte Stelle 0 sein muss.)
Die einfache Endstellenregel gilt auch für alle Teiler von b.

Anwendung im Zehnersystem: 10, 2 und 5

Beispiel im Achtersystem
Zunächst wandeln wir die Zahlen des Einmaleins der 8 um in das Achtersystem.
$8_{10}=10_8 \;\; 16_{10}=20_8 \;\; 24_{10}=30_8 \;\; 32_{10}=40_8 \;\; 40_{10}=50_8$
Teiler von 8 sind 4 und 2. Für die 2 gilt auch im Zehnersystem die einfache Endstellenregel. Also betrachten wir die Teilbarkeit durch 4 für Zahlen, geschrieben im Achtersystem. Gehen wir auch hier das Einmaleins durch.
$4_{10}=4_8 \;\; 8_{10}=10_8 \;\; 12_{10}=14_8 \;\; 16_{10}=20_8 \;\; 20_{10}=24_8 \;\; 24_{10}=30_8$
Wir sehen in der Tat, dass für die Zahlen im Achtersystem die letzte Ziffer immer 0 oder 4 ist, also durch 4 teilbar ist.

Ganz analog betrachten wir die Teilbarkeit durch b^2. In der Zahl $\left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$ kann man bis auf die letzten beiden Stellen b^2 ausklammern.
$\left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b = \left(a_n b^{n-2} + a_{n-1} b^{n-3} + \ldots + a_2\right) b^2 + a_1 b + a_0$
Hieraus erkennt man entsprechend, dass
$\left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b \equiv a_1 b + a_0 \left(\bmod b^2\right)$ gilt. Der Teilungsrest der Ausgangszahl $\left(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_b$ beim Teilen durch b^2 wird also allein von $a_1 b + a_0$ bestimmt. Das ist aber die Zahl, die aus den letzten beiden Ziffern gebildet wird. Speziell bei b^2 ist der Teilungsrest nur dann 0, wenn die letzten beiden Ziffern 0 sind, die Ausgangszahl also mit einer Doppelnull endet. Für alle Teiler *t* von b^2 reicht es aus, wenn $a_1 b + a_0$, also die Zahl aus den letzten beiden Ziffern, durch den Teiler *t* teilbar ist.

b^2 Regel
Für Zahlen, geschrieben im *b*-System, gilt für b^2 die Endstellenregel mit den letzten beiden Ziffern: „Eine Zahl ist durch b^2 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten beiden Ziffern durch b^2 teilbar ist.“
(Bei b^2 selbst heißt das, dass die Zahl auf 00 enden muss.)
Die Endstellenregel mit den letzten beiden Ziffern gilt auch für alle Teiler von b^2.

Anwendung im Zehnersystem: 100, 4 und 25

Beispiel im Achtersystem
b^2 ist hier $64_{10}=100_8$. Hier erkennt man, dass die Zahlen im Achtersystem mit Doppelnull enden, wenn sie ein Vielfaches von

$64_{10} = 100_8$ sind. Also muss umgekehrt jede Zahl mit Doppelnull enden, wenn sie durch $64_{10} = 100_8$ teilbar sein soll. Bei den Teilern von $64_{10} = 100_8$ erkennt man, dass die letzten beiden Stellen ausschlaggebend sind, wenn man sich die Teiler im Achtersystem anschaut: $32_{10} = 40_8$ $16_{10} = 20_8$. Soll eine Zahl im Achtersystem geschrieben durch $32_{10} = 40_8$ bzw. $16_{10} = 20_8$ teilbar sein, so muss die letzte Ziffer eine 0 sein und die vorletzte durch 4 bzw. 2 teilbar sein.

Fassen wir die Beispiele aus dem **Achtersystem** noch einmal übersichtlich zusammen und fügen einige Ergänzungen ein.

Teiler	Teilbarkeitsregel	Begründung
2	Einfache Endstellenregel	2 ist Teiler von $b = 8$
3	Alternierende Quersumme	3 ist Teiler von $b+1 = 9$
4	Einfache Endstellenregel	4 ist Teiler von $b = 8$
5	Keine einfache Regel	
6	Durch 2 und durch 3 teilbar	$6 = 2 \cdot 3$
7	Quersummenregel	$7 = b - 1$
$8_{10} = 10_8$	Einfache Endstellenregel	$8 = b$
$9_{10} = 11_8$	Alternierende Quersumme	$9 = b+1$
$10_{10} = 12_8$	Keine Einfache Regel	10 hat den Teiler 5
$16_{10} = 20_8$	Letzten beiden Ziffern	16 ist Teiler von $b^2 = 64$