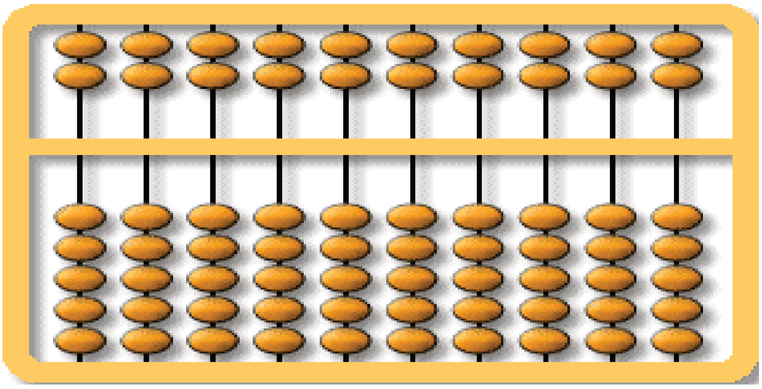


Zahlensysteme

Skript zum Workshop im Wintersemester

Inhalt

Stand: 27. Februar 2011

Autoren: Rolf Fraedrich
Marianne Hausmann
Katrin Schunke
Hans Wiehler

1 Was ist ein Stellenwertsystem

Heute stellen wir Zahlen unter Zuhilfenahme eines Stellenwertsystems dar. Welche Vorzüge dieses bietet, können Sie nachvollziehen, wenn Sie die mühsame Entwicklung an ausgewählten Beispielen über die Jahrhunderte und Kulturen verfolgen.

1.1 Zahldarstellungen im Wandel der Geschichte

Die Entwicklung einer Kultur brachte immer die Notwendigkeit mit sich, Mengen quantitativ zu erfassen, sich darüber zu verständigen und dies auch zu verschriftlichen. Folgen wir also der Geschichte, wie Zahlen durch die Kulturen dargestellt wurden.

1.1.1 Ägypter

Die Ägypter bedienten sich eines Zehnersystems. In der **hieroglyphischen Schrift**[1] (ab 3200 v. Chr.) besaßen sie zur Zahldarstellung für jede Zehner-Potenz ein eigenes Zeichen. Ihre Methode, hiermit Zahlen zu schreiben, war rein additiv (das Zeichen einer jeden Ordnung wurde so oft wiederholt, wie es vorkommen sollte). Die Reihenfolge der Zeichen gehorchte dem Gesetz der Größenfolge mit noch wechselnder Schriftrichtung, d. h. willkürlich wurde mal rechts- und mal linksläufig[2] geschrieben.

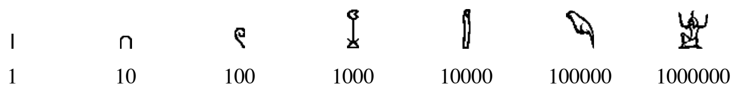


Abbildung 1.1: Zahlzeichen

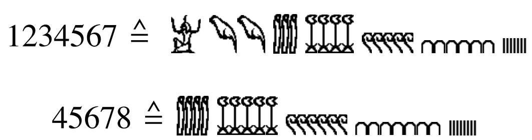


Abbildung 1.2: Zahlbeispiele

Bei der sich entwickelnden **hieratischen**[3] (Mitte des 3. Jahrtausend v. Chr.) und späteren **demotischen Schrift**[4] (diese Zeichen konnten sehr rasch geschrieben werden) führte die Schreibrichtung immer von

[1] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[2] Rechtsläufig bedeutet, dass von links nach rechts geschrieben wird (wie bei uns). Linksläufig bedeutet, dass die Schriftrichtung von rechts nach links verläuft (wie z. B. die arabische Schrift)

[3] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[4] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

rechts nach links. Diese Schriften benötigten zur Darstellung ganzer Zahlen aber erheblich mehr Zeichen, da sie sich für die je neun möglichen Anzahlen einer jeden Ordnung unterschiedlicher Zeichen bediente; das sparte Platz, erschwerte jedoch das Schreiben und Lesen.

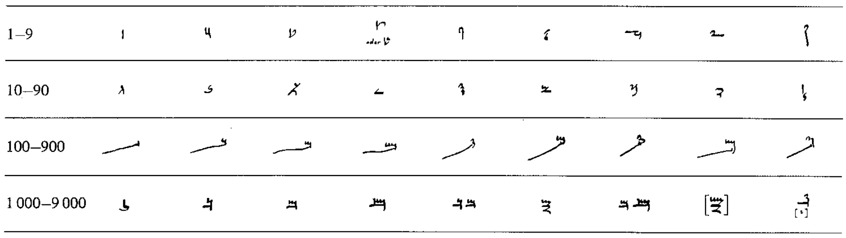


Abbildung 1.3: demotische Zahlzeichen[5]

Abbildung 1.4: Zahlbeispiel mit Originalschreibrichtung von rechts nach links (4-20)[6]

Für die Null, das Nichtvorhandensein einer Stelle, war bei den Schreibweisen der Ägypter noch kein Zeichen erforderlich, da die Zehnerpotenz am Zeichen ablesbar ist.

1.1.2 Babylonier[7]

Die horizontal von links nach rechts verlaufende Keilschrift der Babylonier, deren Ursprung bei den Sumerern[8] zu suchen ist, erreichte unter semitischem[9] Einfluss (3. Jahrtausend v. Chr.) ihre hohe Ausbildung und fand für die anspruchsvolle Zahldarstellung Anwendung.
Neben einer Schreibweise, die dezimalen Charakter trägt und für jede Potenz ein eigenes Zeichen kennt (wie bei der Hieroglyphenschrift[10] der Ägypter), gab es noch eine, die auf dem Sexagesimalsystem[11] beruht. In diesem 60er-System wurden die Zahlzeichen mittels zweier Zeichen – dem Vertikalkeil mit dem Wert 1 und dem Winkelkeil mit dem Wert 10 – dem Prinzip der Größenfolge gehorchend und sich berührend dargestellt. Aus diesen Zeichen wurden durch vielfaches Aneinanderfügen die Anzahlen für jede Stelle im 60er-System dargestellt.

---

[5] aus Tropfke S. 25

[6] aus Tropfke S. 26

[7] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[8] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[9] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[10] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[11] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

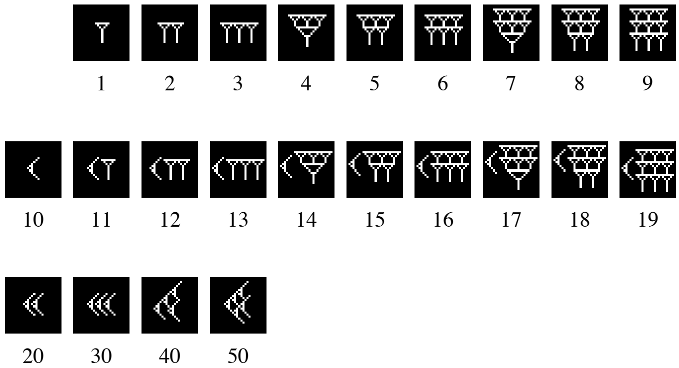


Abbildung 1.5: babylonische Zahlzeichen in Keilschrift[12]

Mit diesen Zeichen dezimalen[13] Charakters wurden Zahlen dargestellt, indem die Anzahlen der Stellen additiv nebeneinander standen.

$$1234567 = 5 \cdot 60^3 + 42 \cdot 60^2 + 56 \cdot 60 + 7 \ \triangleq$$ 

$$45678 = 12 \cdot 60^2 + 41 \cdot 60 + 16 \cdot 1 \ \triangleq$$ 

Abbildung 1.6: Zahlbeispiele

Für dazwischen nicht vorkommende Stellen ließen die Babylonier einen Zwischenraum oder fügten als Lückenzeichen zwei übereinander gesetzte, sich nicht berührende  Winkelkeile ein. Der Wert der ersten oder letzten Stelle und somit die Größenordnung der Zahl musste dem Zusammenhang entnommen werden, da am Ende nicht vorkommende Stellen nie gekennzeichnet wurden.
Das Sexagesimalsystem ist in der Winkel- und Zeiteinteilung erhalten geblieben.

1.1.3 Griechen

Bei den Griechen gab es zwei Zahlensysteme, zum einen das ältere **attische System**[14] (5. Jahrhundert v. Chr.), welches in der Salaminischen Rechentafel[15], in Tributlisten und in Abrechnungen Verwendung fand. Ihr System der Zahlschreibung wird als akrophonisch[16] bezeichnet, d.h. für die Zehnerstufen wird jeweils das Anfangszeichen des betreffenden Zahlwortes verwendet. Zudem wird bei fünf jeweils eine Zwischenstufe eingeschaltet, sodass z.B. die 500 als eine fünf im Hunderterbereich auftritt. Die nachstehenden Zeichen wurden von

[12] gefunden bei wikipedia
[13] siehe Kapitel 5.1 Lexikon
[14] siehe Kapitel 5.1 Lexikon
[15] siehe Kapitel 5.1 Lexikon und Kapitel 1.2.2
[16] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

Herodian[17] beschrieben und nach ihm benannt.

	Π	𐅄	𐅅	𐅆	𐅇
	5	50	500	5000	50000
I	Δ	H	X	M	
1	10	100	1000	10000	

Abbildung 1.7: herodianische Zahlzeichen

45678 ≙ MMMM𐅆𐅅H𐅄ΔΔΠIII

Abbildung 1.8: Zahlbeispiel

Im Gegensatz dazu entstand auch bei den Griechen mit dem **hellenischen System**[18] (Mitte des 4. Jahrhunderts v. Chr.) ein viel kürzeres, aber nicht so übersichtliches System. In diesem System erfolgte die Darstellung von Zahlen ebenfalls durch Zahlbuchstaben. Hierzu wurden die 24 Buchstaben des griechischen Alphabets – erweitert um die drei historisch schon sehr früh nicht mehr als Buchstaben benutzten Zeichen Digamma, Koppa, und Sampi – in drei Gruppen zu je 9 Zeichen für Einer, Zehner, Hunderter eingeteilt:

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Abbildung 1.9: hellenische Zahlzeichen

45678 ≙ $\overline{\mu\,{}_{,}\varepsilon\chi o\eta}$

Abbildung 1.10: Zahlbeispiel

Die Kennzeichnung der Tausender erfolgte durch das Vorsetzen eines kleinen Beistriches, wie z. B. ͵α = 1000, und die der Millionen durch ein M mit dem darüber geschriebenen Zahlbuchstaben, wie z.B. $\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$ = 5000000. Um die Worte von den Zahlbuchstaben unterscheiden zu können, wurden (sofern sorgfältig geschrieben wurde) Zahlen überstrichen.

[17] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[18] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

Ganze Zahlen stellten sie im Dezimalsystem dar. Für astronomische Rechnungen/Bruchdarstellungen nutzen sie das sumerische Sexagesimalsystem der Babylonier mit den Zeichen des hellenischen Systems. Dabei kennzeichneten sie Leerstellen durch ein überstrichenes Omikron ō (Abkürzung für οὐδέν = nichts).

1.1.4 Römer

PC

EntwicklungWww-ZahldarstellungRoemischerAbakus

Bei der Zahlschreibung der Römer ist wieder ein dezimales System zu finden. Sie verwendeten – ähnlich den Griechen im attischen System – Individualzeichen für die Zehnerpotenzen mit Zwischenstufen bei 5, 50, … .

V	L	D	I))	I)))
5	50	500	5000	50000

I	X	C	(I)	((I))	(((I)))	$\boxed{\mathrm{X}}$
1	10	100	1000	10000	100000	1000000

Abbildung 1.11: römische Zahlzeichen

$$1234567 \triangleq \boxed{\mathrm{X}}\,(((\mathrm{I})))(((\mathrm{I})))\ ((\mathrm{I}))((\mathrm{I}))((\mathrm{I}))\ (\mathrm{I})(\mathrm{I})(\mathrm{I})(\mathrm{I})\ \mathrm{D\ L\ X\ V\ II}$$

$$45678 \triangleq ((\mathrm{I}))((\mathrm{I}))((\mathrm{I}))((\mathrm{I}))\ \mathrm{I}))\ \mathrm{D\ C\ L\ XX\ V\ III}$$

Abbildung 1.12: Zahlbeispiele

Bei zusammengesetzten Zahlen, wie z.B. XXXX oder LXXXVIII findet das additive Verfahren Verwendung. Erst im Mittelalter setzt sich dann zunehmend auch das subtraktive Prinzip, in dem 1-2 Zeichen der Stufe vorangestellt werden und diese um sie vermindert wird, durch:

$$\begin{aligned} \mathrm{IV} &= 4 \\ \mathrm{IXX\ oder\ XIX} &= 19 \end{aligned}$$

Über die Zahlzeichen der Zwischenstufen wird angenommen, dass sie aus den Buchstaben der Zehnerpotenzen durch Halbieren abgeleitet wurden.

1.1.5 Chinesen

Die Chinesen bedienten sich ab dem 3. Jahrhundert v. Chr. der entsprechenden Zahlwortzeichen als Individualzeichen für die Werte 1-9 und die Potenzen der Basis 10. Die Bildungsgesetze der Zahlwörter sind bei ihnen, anders als bei uns, auch in der Spreche noch deutlich zu erkennen. Es heißt also nicht *dreißig* sondern *dreizehn* und *zehnzwei* anstelle von *zwölf*. Es gilt die Regel, wenn einer größeren eine kleinere Zahl folgt, so werden sie addiert (十三 ≙ $10+3 = 13$), folgt einer kleineren aber eine größere Zahl, so werden sie multipliziert (三十 ≙ $3\cdot 10 = 30$)[19].

零 oder 〇	0	十	10
一	1	百	100
二 oder 兩	2	千	1000
三	3	萬	10.000
四	4	億	100.000.000
五	5	兆	1.000.000.000.000
六	6		
七	7		
八	8		
九	9		

Abbildung 1.13: Zahlzeichen

34567 ≙ 三萬四千五百六十七

45678 ≙ 四萬五千六百七十八

Abbildung 1.14: Zahlbeispiele

Da die Potenzen noch mit angegeben wurden, war das Einführen eines Fehlzeichens also einer Null hier noch nicht nötig.

Neben der bisher dargestellten Schrift aus Grundziffern und Potenzen wurden ab dem 2. Jahrhundert v. Chr. zunächst auf dem Rechenbrett Zahlen auch durch die Stäbchen- oder Strichschrift dargestellt. Mit

[19] original werden die Zeichen untereinander geschrieben

Holz- oder Bambusstäbchen wurde die Zahlen 1-9 in die Kolumnen gelegt.

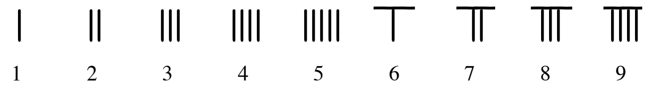


Abbildung 1.15: Strichzahlzeichen

Schließlich wurden auch unabhängig von Rechenbrettern Strichzahlen geschrieben. Um die Stellen auseinander halten zu können, wurden dabei die Zeichen an Positionen ungerader oder gerader Ordnung um 90° gedreht.

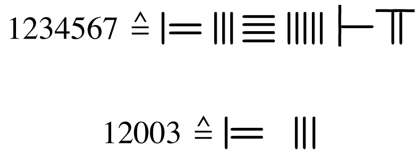


Abbildung 1.16: Zahlbeispiele

Nachdem im 8. Jh. n. Chr. statt einer Lücke für eine fehlende Position die Null eingesetzt wurde (zunächst als Punkt, später dann als *Kreis),* war das dezimale Positionssystem[20] vollkommen und 12003 wurde als 𝍠𝍪oo𝍢 dargestellt.

In diesem System konnten auch reelle Zahlen – schon ähnlich wie bei uns – dargestellt werden. Die Stellen/Potenzen wurden in diesem Fall erkennbar durch Markieren der Einer oder Zehntel. Der gesamte Bruchteil konnte aber auch einem Index ähnlich geschrieben (12,003 ≙ 𝍠𝍪 $_{oo}$𝍢) werden.

1.1.6 Inder

Ab 300 n. Chr. traten *Wortzahlen*[21] als ein dezimales Positionssystem auf. Im 5. Jh. n. Chr. trat bei den Indern das erste alphabetische Zahlensystem auf. Jeder durch Vokale dargestellten Zehnerpotenz wurde ein Konsonant als Multiplikator beigefügt.
Weiter entwickelte sich mit dem Katapayadi-System ein echtes alphabetisches dezimales Positionssystem. Den Ziffern 1 bis 9 und der Null blieben Konsonanten zugeordnet:

[20] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[21] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

1	k, ṭ, p, y	6	c, t, ṣ
2	kh, ṭh, ph, r	7	ch, th, s
3	g, ḍ, b, l	8	j, d, h
4	gh, ḍh, bh, v	9	jh, dh
5	ṅ, ṇ, m, ś	0	ñ, n

Abbildung 1.17: Buchstabenziffern des Katapayadi-Systems

Zahlen wurden daraus gebildet, indem die Konsonanten, durch beliebige Vokale voneinander getrennt, von rechts nach links abbauend niedergeschrieben wurden. Die Konsonanten und Vokale wurden dabei so gewählt, dass die Zahlen sich gut lesen ließen oder sogar gleichzeitig noch eine Wortbedeutung hatten.

1234567 ≙ satumovigekhak

12003 ≙ loninephak

Abbildung 1.18: Zahlbeispiele mit Schreibrichtung von rechts nach links

Neben den *Wort*- und *Buchstabenzahlen* gab es ab dem 4. Jh. v. Chr. auch durch Ziffern dargestellte Zahlen. Zunächst mit den *Kharosthi*-Ziffern[22], die ein Vierersystem erkennen ließen, ab dem 3. Jh. mit den *Brahmi*-Ziffern[23]. Im 4. Jh. n. Chr. wurde die Null – zunächst als Punkt – eingeführt. Durch eine Inschrift 595 n. Chr. ist ein voll entwickeltes dezimales Positionssystem mit Ziffern zur Zahlendarstellung erstmalig belegt.

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	٠
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Abbildung 1.19: Brahmi-Ziffern

1234567 ≙ ١٢٣٤٥٦٧

12003 ≙ ١٢٠٠٣

Abbildung 1.20: Zahlbeispiele

Das Dezimalsystem, das in Indien bei den ganzen Zahlen angewendet wird, wurde auf die Brüche nicht übertragen. In der Astronomie wurde spätestens ab dem 6. Jh. n. Chr. mit Sexagesimalbrüchen gearbeitet, was auf babylonischen Einfluss schließen lässt. Das Dezimalsystem wurde bei Brüchen erst in neuerer Zeit eingeführt.

[22] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[23] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

1.1.7 Araber

Zu den Arabern werden in diesem Zusammenhang alle die Kulturkreise gezählt, deren Religion der Islam und deren Sprache arabisch oder persisch waren.
Die erste Möglichkeit der schriftlichen Zahldarstellung übernahmen die Araber aus den Gebieten, in die sie eingefallen waren, so z.B. aus dem östlichen Mittelmeerraum die griechischen Zahlbuchstaben. Mit dieser Zahlschreibung, die bis ins 12. Jh. anzutreffen ist, wurden auch Brüche dargestellt.
Als eine weitere Möglichkeit Zahlen darzustellen, traten erstmalig im 8. Jh. die **Ǧummalzahlen** auf. Zur Anwendung kam diese Zahlschreibung in Rechen- und astronomischen Lehrbüchern, in denen überwiegend im Sexagesimalsystem gearbeitet wurde, sodass für das Positionssystem die Zahlen bis 59 von besonderer Bedeutung waren. Als Zahlzeichen wurden Buchstaben ihres Alphabets benutzt, denen Zahlenwerte zugeordnet wurden. Die additiv zusammengesetzten Zahlzeichen für jede Position des Sexagesimalsystems wurden in der arabischen Schriftrichtung (von rechts nach links), mit dem größten Wert beginnend aneinander gefügt.

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	ط	ى	ك	ل	م	ن
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50

Abbildung 1.21: einfache Ǧummalzahlzeichen

$$1234567 = 5 \cdot 60^3 + 42 \cdot 60^2 + 56 \cdot 60 + 7 \;\hat{=}\; \text{Gerade}^{24}$$ ز نو مب ه

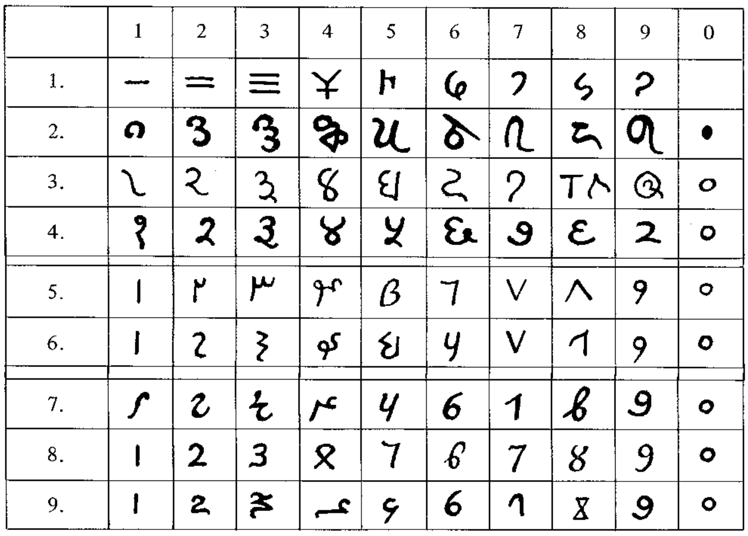
$$45678 = 12 \cdot 60^2 + 41 \cdot 60 + 18 \cdot 1 \;\hat{=}\; \text{Gerade}$$ ىح ما ىب

Abbildung 1.22: Zahlbeispiele in arabischer Schriftrichtung von rechts nach links

Um die Position/Stelle sichtbar zu machen wurden im Anschluss die Stellen bezeichnet. 4 25 40 Erhöhtes, Gerade und Minuten (wäre im Arabischen von rechts nach links geschrieben) hätte den Wert $4 \cdot 60^1 + 25 \cdot 60^0 + 40 \cdot 60^{-1} = 265\ ⅔$. Bei langen Zahlen wurden nur die erste und letzte Stelle oder nur die kleinste Stelle benannt.
Durch eine indische Gesandtschaft, die 773 n. Chr. an den Hof des Kalifen in Bagdad kam, bekamen die Araber Kenntnis von den **indischen Zahlen**, die sich schnell verbreiteten. So lernten sie die Null und die neun Ziffern kennen.
Das älteste arabische Rechenbuch mit indisch-arabischen Zahlen ist von 952/953 n. Chr.. Die leicht abgewandelt übernommenen Zahlzeichen der Inder veränderten sich im Laufe der Zeit, wie sie auch im

[24] Gerade deutet hier die Potenz 10^0 an, d. h. Einer sind hier die kleinste Stelle

arabischen Kulturkreis variierten.
Obwohl die Araber linksläufig schreiben, blieben sie dabei – sofern indische Ziffern verwendet wurden – wie in Indien die höchsten Stellen links und die kleinsten am weitesten rechts zu schreiben.



Inder
1. Brāhmī-Ziffern [Menninger; 2, 233].
2. Bakhshālī-Manuskript [Table IV, 7].
3. Gwalior-Inschriften [BSS; 177].
4. Sanskrit (Nāgarī) [DS; 1, 120].

Araber
Ostarabisch (s. S. 53):
5. al-Uqlīdisī [Uqlīdisī 2; 355], Kūšyār ibn Labbān (10./11. Jh.) [47], al-Nasawī (11. Jh.) [Uqlīdisī 2; 355], al-Kāšī (15. Jh.) [4v].
6. Manuskript aus Schiraz (um 970) [Woepcke 5; 75].

Westarabisch (s. S. 54):
7. al-Ḥaṣṣār (Ms. von 1432) [Suter 3; 15].
8. al-Umawī (Ms. von 1373) [Uqlīdisī 2; 355].
9. al-Qalaṣādī [Woepcke 5; 62], [Woepcke 2; 358].

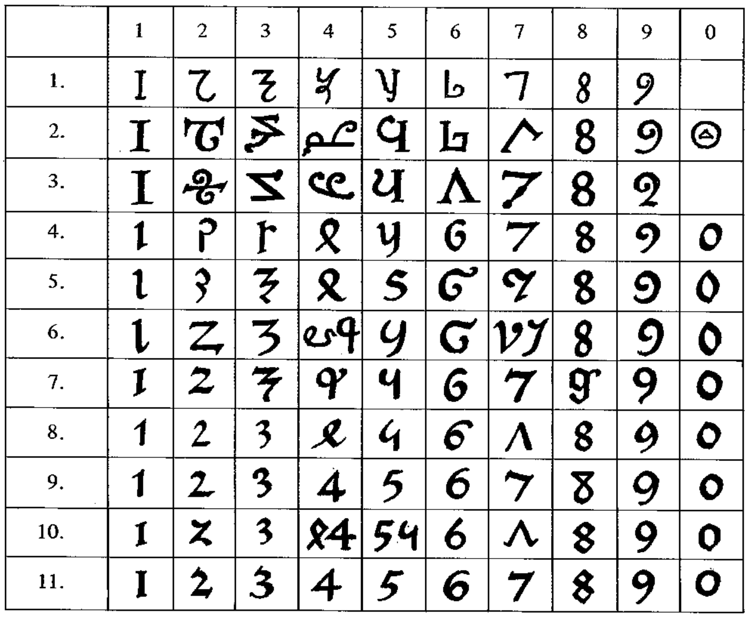
Abbildung 1.23: Entwicklung der Ziffern[25]

1.1.8 Europa

Anfangs übernahmen die jungen Völker zunächst die dezimale Zahlendarstellung der Römer. Für die schriftliche Niederlegung von Zahlen, wie es z.B. in den Rechenbüchern von Kaufleuten, Klosterverwaltern etc. notwendig war, wurden die kursiv abgewandelten römischen Zahlzeichen bis weit ins 16. Jh. hinein verwendet.
Die indisch-arabischen Ziffern im dezimalen Stellenwertsystem wurden über Spanien in Europa bekannt. Das Rechenbuch von *Mohammad ibn Musa al-Chwarizmi*[26] war für ihre Verbreitung von größter Bedeutung. Aber erst mit dem Aufkommen des Buchdrucks (Mitte des

[25] aus Tropfke, S. 66
[26] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

15. Jahrhundert) verwendeten alle Rechenbücher die neuen arabischen Ziffern. Die durch den Druck festgelegten Formen der Ziffern haben sich bis auf die der 4, 5 und 7 bis in die heutige Zeit unverändert erhalten.



1. Cod. Vigilianus (aus dem Jahre 976) [Ewald; 356].
2. Cod. Erlangen, Universitätsbibl. 379 („Boetius"-Geometrie, Mitte des 11. Jhs.) [Folkerts 1; Tafel 1]: Ziffern auf dem Abakus.
3. Clm 13021 („Boetius"-Geometrie, 13. Jh.) [Folkerts 1; Tafel 2].
4. Cod. Vindob. 275 (Algorismusschrift A1, von 1143) [al-H̱wārizmī 2; 51].
5. Cod. Par. bibl. nat. 16208 (Algorismusschrift A 3, vor 1180) [al-H̱wārizmī 2; 51].
6. Cod. Par. bibl. nat. 16202 (Algorismusschrift H1, Anfang des 13. Jhs.), Cod. Par. bibl. nat. 7359 (Algorismusschrift H 4, um 1300) [al-H̱wārizmī 2; 51].
7. Columbia-Algorismus (14. Jh.) [Vogel 24; 12].
8. Algorismus Ratisbonensis [Vogel 11; Tafel VI].
9. Treviso-Arithmetik von 1478 [1^v].
10. Bamberger Rechenbuch von 1483 [9^r].
11. Dürer [42].

Abbildung 1.24: Entwicklung der indisch-arabische Ziffern in Europa[27]

Die heutige geöffnete Form der 4 im Gegensatz zu der geschlossenen Form der 4 tritt erst im 19. Jh. auf. Zur Darstellung großer Zahlen benutzte man in Europa ebenso wie im arabischen Raum, die Einteilung größerer Zahlen in Gruppen zu je drei Ziffern, wobei die Tausender entweder durch einen Bogen zusammengefasst oder durch einen Punkt markiert wurden.

1.2 Unterschiedliche Zahldarstellungen in der Praxis

1.2.1 Fingerdarstellung

Wie auch alle anderen Kulturen kannten die Araber die Möglichkeit, Zahlen mit Hilfe ihrer Finger darzustellen. Sie nutzten die unter-

[27] aus Tropfke, S. 67

schiedlichen Möglichkeiten, ihre Finger in den Gelenken umzuknicken und waren dadurch in der Lage, mit ihren zwei Händen Zahlen von 1 bis 9999 darzustellen.

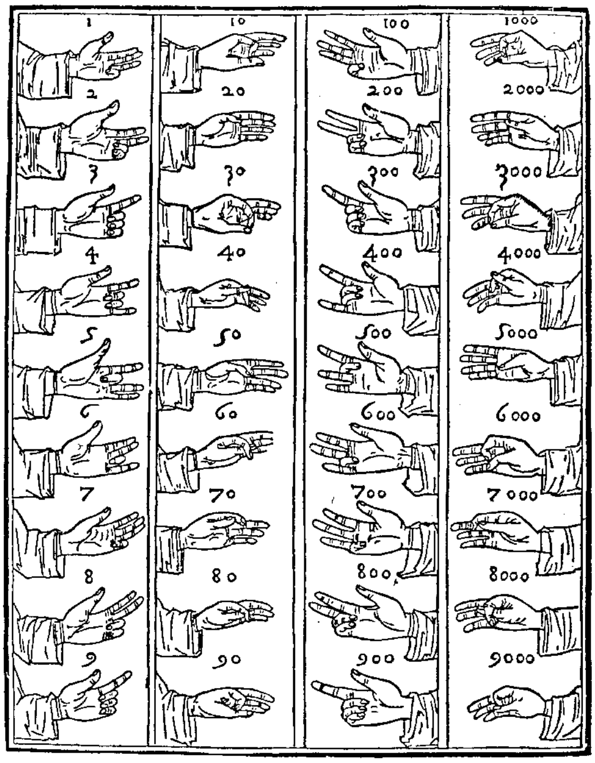


Abbildung 1.25: Fingerzahlen nach Luca Pacioli[28,29]

Mit den drei letzten Fingern der linken Hand wurden die Einer, mit Zeigefinger und Daumen die Zehner angezeigt. An der rechten Hand waren die 3 heiligen Finger für die Hunderter und Daumen und Zeigefinger für die Tausender. Das hier zutage tretende Dezimale System war auch schon in den arabischen Zahlbezeichnungen zu finden. Angewandt wurde das Fingerrechnen hauptsächlich zur Unterstützung des Kopfrechnens.

[28] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[29] aus Tropfke, S. 50

1.2.2 Abaki[30] in verschiedenen Ausführungen

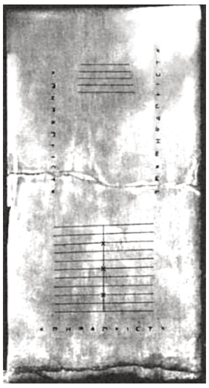


Abbildung 1.26: salaminische Rechentafel[31]

Auf dieser griechischen Rechentafel aus dem 3. oder 4. Jahrhundert v. Chr. wurden Steine auf die für die Zehner-Potenzen stehenden Rillen gelegt um Zahlen darzustellen.

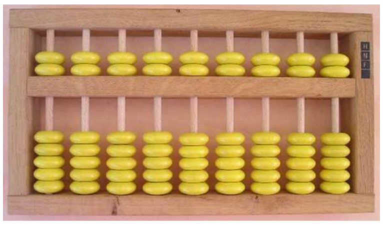


Abbildung 1.27: Abakus chinesischer Art[32]

PC

EntwicklungWww-DerAbakus-GeschichteundFunktionsweise

Erste chinesische Handabaki gibt es seit den Anfängen des 11. Jahrhunderts. Die heute noch benutzte Form ist seit dem 10. Jahrhundert nach Chr. bekannt. Für jede Zehnerpotenz gibt es 5 Perlen mit dem Wert 1 und 2 weitere im oberen Bereich mit dem fünffachen Wert.

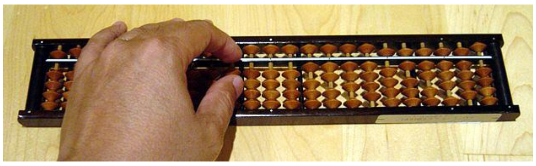


Abbildung 1.28: japanischer Soroban[33]

Der japanische Handabakus hat sich über mehrere Schritte aus dem chinesischen entwickelte. Die heutige Form gibt es seit Mitte des 20. Jahrhunderts. Für jede Zehnerpotenz gibt es 4 Perlen mit dem Wert 1 und eine weitere im oberen Bereich mit dem fünffachen Wert.

---

30 siehe Kapitel 5.1 Lexikon

31 siehe Kapitel 5.1 Lexikon

32 gefunden auf http://rolf.fraedrich.de/mathematik/mathe.htm

33 gefunden auf der engl. Version von wikipedia

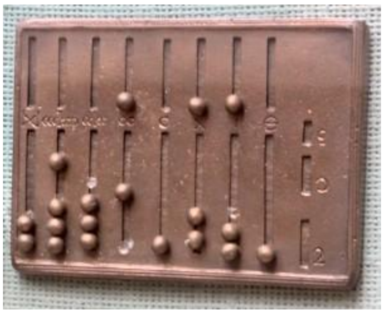


Abbildung 1.29: Rekonstruktion eines römischen Handabakus[34]

Das Original wird auf 300 vor Chr. datiert. Für jede Zehnerpotenz gibt es 4 Kugeln mit dem Wert 1 und eine weitere im oberen Bereich mit dem fünffachen Wert.

PC

EntwicklungDemo-ZahldarstellungRechenbrett

Abbildung 1.30: Holzschnitt eines Rechentisches

Auf dem Rechenbrett nach Gebert[35], wurden die Werte in den Spalten des Rechenbretts nicht mehr durch Legen oder Zeichnen einer entsprechenden Anzahl dargestellt, sondern durch Apices, (Holz-)Plättchen mit den Ziffern 0 bis 9.

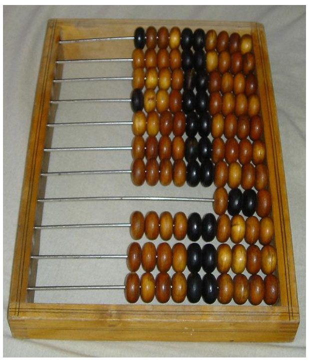


Abbildung 1.31: russische Stschjoty oder Stschoty[36]

[34] fotografiert von Mike Cowlisha 2004, gefunden auf der engl. Version von wikipedia

[35] Gebert von Aurillac, siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[36] gefunden bei wikipedia

Diese russische Rechenmaschine hat 10 Kugeln (die 5. und 6. womöglich zur besseren Lesbarkeit in anderer Farbe) auf einer Stange für jede Zehnerpotenz. Zur Markierung des Kommas ist die Stange mit nur 4 Kugeln vorgesehen.

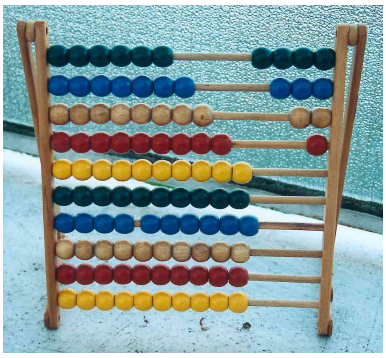


Abbildung 1.32: Zählrahmen[37]

Schule

Der Zählrahmen ist zur Zahldarstellung in Grundschulen anzutreffen. Leider werden die Stäbe nicht den Zehnerpotenzen entsprechend genutzt, Zahlen werden hier mengenerhaltend dargestellt. Die Zahl 23 wird durch 2 volle Reihen und 3 weitere Perlen dargestellt, dies entspricht eher einer Darstellung im 100er-Feld.

1.2.3 Zählwerkdarstellung

Bei Rollenzählwerken wird das „kleinste“ Rad über einen Mechanismus um einen definierten Winkel weitergedreht. Das Rad lässt der Reihe nach – je nach Drehung – in einer Anzeige Ziffern sichtbar werden.

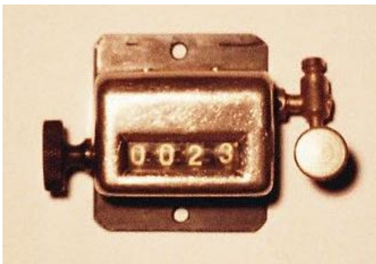


Abbildung 1.33: durch Hebel betätigtes Zählwerk mit Rückstellschraube[38]

[37] gefunden auf http://rolf.fraedrich.de/mathematik/mathe.htm

[38] fotografiert von Marcus Schweiss 3/2006, gefunden bei wikipedia

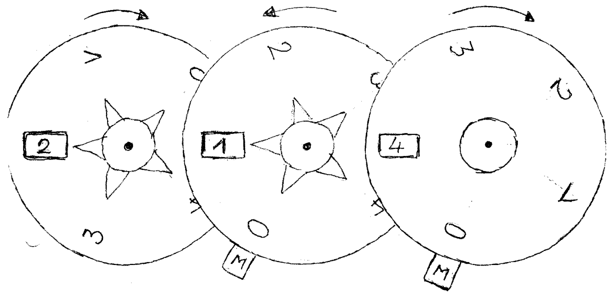


Abbildung 1.34: Scheibenzählwerk mit Mitnehmer im 5er-System

Für große Anzahlen werden Zählwerke hintereinander geschaltet.
Nach voller Umdrehung eines Rades bewegt ein Mitnehmer das „nächstgrößere“ Rad um 1 weiter. Ein klassisches Beispiel dafür ist ein Tacho. Beim menschlichen Zählwerk arbeiten die Personen/Positionen nacheinander und melden bei Überschreiten der Zählgrenze einer Position dies an den Nachbarn. Das Ganze ist noch einfacher als auf der Abbildung 1.36 umzusetzen, wenn statt Material die Finger einer Hand aufgezeigt werden (dann sind Systeme bis zur

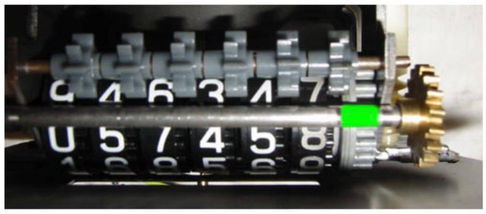


Abbildung 1.35: Kilometerzähler

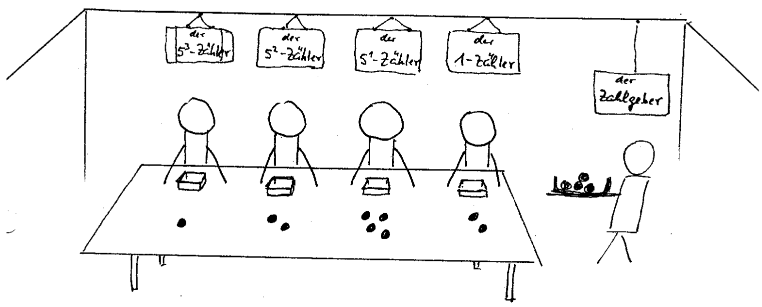


Abbildung 1.36: Personenzählwerk im 5er-System

Grundzahl 11 möglich[39]) oder beim Dualsystem die Personen an den Positionen lediglich sitzen oder stehen.

1.3 Unterschiedliche Zahlsysteme

PC

EntwicklungWww-WurzelzieherMathe-pedia

Nachdem wir nun unterschiedliche Zahldarstellungen und die dahinter steckenden Systeme aus der Geschichte und Praxis betrachtet haben, geht es jetzt darum, die Systeme zu kategorisieren.

---

[39] Mit zehn Fingern können die elf Zahlen von null bis zehn dargestellt werden, es gibt also 11 Zahlzeichen.

1.3.1 Additionssystem

Def!

Bei Zahlsystemen dieses Typs werden Symbole – denen Zahlwerte zugeordnet sind – nebeneinander gefügt.
Als einfachstes Additionssystem gelten Strichdarstellungen, Unärsystem[40] genannt. Hier gibt es nur ein Symbol mit dem Wert 1, das entsprechend oft eingesetzt wird. Für große Zahlen wird in diesem System viel Platz benötigt und es besteht die Gefahr, dass es unübersichtlich wird.
Als entwickelte Additionssysteme gelten Hieroglyphen, das attische System und das der Römer, die hieratisch/demotischen und hellenischen.

Hieroglyphen	𓂭𓂭𓂭𓂭 𓆼𓆼𓆼𓆼𓆼 𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢 𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆 𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺
attisch	MMMM𐅇𐅅H𐅄ΔΔΠIII
hellenisch	$\overline{\text{μ͵εχοη}}$
römisch	(((I)))(((I)))(((I)))(((I))) I)) D C L XX V III

Abbildung 1.37: Zahldarstellung für 45678 in Additionssystemen

Bei diesen Systemen gibt es für jede Potenz der Basis (teilweise auch Zwischenstufen) ein Symbol mit entsprechendem Wert, das entsprechend oft aneinandergefügt wird. In der Regel werden sie dabei dem Wert nach sortiert aneinander gefügt, beginnend mit den Symbolen des jeweils höchsten Wertes.

1.3.2 Hybridsystem

Def!

Zahlsysteme dieses Typs kamen in der Geschichte nur selten vor. Sie bedienten sich einer begrenzten Anzahl von Symbolen für Grundziffern sowie eigener Symbole für jede Potenz der Basis.

chinesisch	四萬五千六百七十八[41]
Ǧummalzahl	Gerade ىب ما ى وى

Abbildung 1.38: Zahldarstellung für 45678 in Hybridsystemen

Dem Symbol der Grundziffer folgt das der Position. Diese Produkte werden Stelle für Stelle aneinandergefügt. Die arabischen Ǧummalzahlen weichen da ab, bei ihnen werden die Stellen erst am Ende angegeben (bei langen Zahlen auch nur die kleinste oder größte Stelle).

[40] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[41] die korrekte Darstellung wäre eine Schreibweise von oben nach unten

1.3.3 Stellenwert- oder Positionssystem

Def!

Bei einem Stellenwert- oder Positionssystem handelt es sich um ein Zahlsystem, bei dem die Bedeutung eines Symbols von seiner Stellung innerhalb der Symbolkette abhängt. Der Zahlwert ermittelt sich aus der Summe der Produkte der Symbole mit der ihrer Position entsprechenden Potenz der Basis des Zahlsystems.
Zahlen werden in der g-adischen[42] Darstellung durch eine Folge von Ziffern a_i dargestellt. Dabei wird in Schreibrichtung mit dem Symbol für den Faktor bei der höchstens Potenz begonnen:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_g$$

Bei Symbolfolgen eines nichtdezimalen Systems wird die Grundzahl/Basis g der Symbolfolge als Index angehangen. Entgegen Zahlen im uns geläufigen dezimalen Stellenwertsystem werden diese Zahlen Symbol für Symbol gelesen unter anschließender Angabe der Basis.
Die Symbolfolge steht für die Zahl

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot g^i = a_0 + a_1 \cdot g + a_2 \cdot g^2 + \ldots + a_{n-1} \cdot g^{n-1} + a_n \cdot g^n \ .$$

In Ermangelung eines Symbols für die Null ist bei babylonischen, Strich-/Stäbchenzahlen sowie Brahmi-Zahlen zunächst nur von einem unvollständigen Stellenwertsystem zu sprechen.

chinesische Strichzahl	|═ |||
indische Brahmi-Zahl	١٢ ٣

Abbildung 1.39: Zahldarstellung für 12003 in noch unvollständigen Positionssystemen

chinesische Strichzahl	|═oo|||
indische Brahmi-Zahl	١٢٠٠٣
indische Buchstabenzahl (Katapayadi-System)	loninephak
indisch-arabisch	12003

Abbildung 1.40: Zahldarstellung für 12003 in vollständigen Positionssystemen

Bei den Buchstabenzahlen des indischen Katapayadi-Systems und den uns heute geläufigen Zahlen indisch-arabischen Ursprungs handelt es sich von Anbeginn um Zahldarstellungen in einem Stellenwert- oder Positionssystem.
Als Basis eines Positionssystems werden für gewöhnlich natürliche Zahlen ab 2 gewählt (obwohl auch reelle, rationale, sogar irrationale

[42] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

Basen mit einem Betrag größer eins möglich sind). Werden ganzzahlige Exponenten zugelassen, können rationale Zahlen dargestellt werden. Stellen mit negativem Exponenten werden dann durch ein Komma (in anderen Kulturen auch ein Punkt) abgetrennt.
Dieses Skript beschränkt sich in der Regel auf Positionssysteme mit natürlicher Basis und natürlichem Exponenten einschließlich Null, also mit natürlichen Zahlen.

1.4 Rechnen in Zahlsystemen

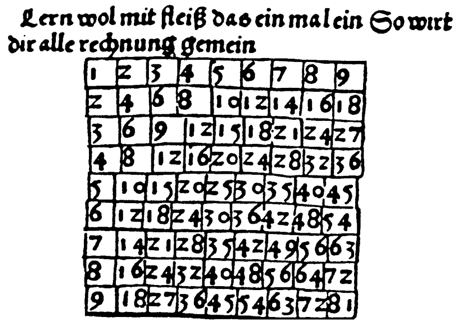
Die **Ägypter** führten schon alle vier Grundrechenarten aus und konnten sie in der Gleichungsrechnung anwenden.
Ihr Hauptaugenmerk legten sie auf die Addition, da sie von ihr alle anderen Rechenarten ableiteten. Die Subtraktion war bei ihnen *nur* die Umkehrung der Addition. Die Multiplikation und Division waren schon komplexer, sie wurden unter Anwendung von Verdopplung[43] und Halbierung gelöst. Alle vier Rechenarten waren aufgrund der unübersichtlichen Zahldarstellung umständlicher als heute und basierten hauptsächlich auf Kopfrechnen.

PC

EntwicklungWwwPh-Linz-Aegyptisches-Multiplizieren

Den **Babyloniern** wird zugesprochen, dass sie die einzigen waren, die unmittelbar mit Zahlen rechnen konnten. Auch sie führten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (indem mit dem Kehrwert multipliziert wurde) aus. Für umfangreichere Rechnungen – die nicht auf Anhieb im Kopf gelöst werden konnten und in ihrer schriftlichen Notation sehr umständlich/langwierig waren – wurden einmal gelöste Rechnungen in Tabellen (Produkte, Kehrwerte, Quadrate und Quadratwurzeln, Kuben und Kubikwurzeln, Logarithmen) festgehalten, um auf sie zurückgreifen zu können. Tabellen dieser Art kamen bis in die Gegenwart (bis zum Aufkommen von Rechenmaschinen, insbesondere dem Taschenrechner) zur Anwendung. Aber auch Print-Kalender sind als Tabellen zu betrachten und sind auch heute noch Teil unseres Alltags. Ebenfalls findet die Einspluseins- und Einmaleinstabelle in der Grundschule auch heute noch ihren Platz, jedoch zum Erkennen von Systematiken unseres Zahlsystems.

Info



Lern wol mit fleiß das ein mal ein So wirt dir alle rechnung gemein

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Abbildung 1.41: Einmaleins-Tafel aus einem Rechenbuch des 16. Jahrhunderts

Schule

Sofern **Asiaten**, **Araber**, **Griechen** oder **Römer** Rechnungen mit Zahlen ausführen wollten, bedienten sie sich (sofern sie nicht im Kopf gelöst werden konnten) einer Tabelle mit einer Spalte je Stellenwert,

[43] siehe auch www.ph-linz.at/staff/boe/didaktik1/Aegypt.htm

PC

EntwicklungWww-DerAbakus-GeschichteundFunktionsweise

eines Abakus oder Rechenbretts. So unterschiedlich diese Arbeitsmittel auch aussehen, ist ihnen eins gemeinsam: Sie basieren alle bereits auf dem Gedanken des Stellenwertes, auf dem auch unsere heutigen Algorithmen beruhen, ohne dass sie jedoch ein Zeichen für die Null benötigen. Für jede Stelle (in der Regel die Zehnerpotenzen) ist eine Spalte/Rille/Linie oder Stab vorgesehen. Die Häufigkeit des vorkommenden Stellenwertes wird durch Legen/Schieben der entsprechenden Anzahl von Steinchen/Rechenmünzen dargestellt (bei der noch heute bekannten Form des Abakus wurden diese Steinchen aufgefädelt). Zum Rechnen werden stellengerecht weitere Zahlen hinzugefügt oder subtrahiert. Dabei kann es notwendig werden bei Überschreiten der maximalen Anzahl eines Stellenwertes (im Zehnersystem das Überschreiten der 9) zu bündeln, d. h. statt 10 Einheiten einer Potenz werden diese gleichwertig durch 1 Einheit der nächst höheren Potenz dargestellt. Ebenso ist bei Unterschreitung der minimalen Anzahl eines Stellenwertes (im Zehnersystem das Unterschreiten der 0) zu entbündeln, d. h. die nächst höhere Potenz wird um 1 Einheit vermindert und gleichwertig durch 10 Einheiten der zur Frage stehenden Potenz ersetzt.

Bis um das Jahr 1200 herum war das Ziffernrechnen in **Europa** nur gelehrten Kreisen – vor allem den Klöstern – vorbehalten bzw. geläufig. Aus einer Handschrift eines Lehrgedichtes aus der zweiten Hälfte des 13. Jh. geht hervor, dass später auch in nicht klösterlichen Kreisen mit diesen neuen Ziffern umgegangen wurde. Im kaufmännischen Bereich verbreiteten sich die arabischen Ziffern nur sehr zögernd. Kaufleuten wurde z. T. verboten, ihre Handelsbücher mit arabischen Ziffern zu führen. Auch im 15. Jh. waren diese in Kaufmannsbüchern noch keine Selbstverständlichkeit – das nebenstehende Bild aus *Margarita Philosophica*[44] von Gregor Reisch stellt Abakisten[45] im Wettstreit mit Algoristen[46] dar. Die als Frau dargestellte *Arithmetica* wendet sich zur Zeit des ausgehenden Mittelalters bereits den Algoristen und damit der neuen Rechenmethode zu.

Abbildung 1.42: Darstellung des Rechenwettstreits zwischen Abakisten und Algoristen

Rechenbücher von Adam Ries[47] führten schließlich zu weiter

[44] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[45] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

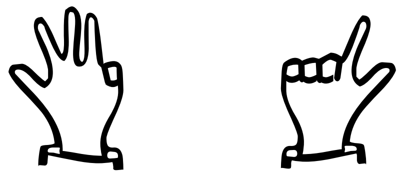
[46] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

[47] siehe Kapitel 5.1 Lexikon

Verbreitung der indisch-arabischen Zahlzeichen und dem Umgang mit ihnen – auch den uns heute geläufigen Algorithmen für die Grundrechenarten.
Abschließend sei noch auf eine heute nur noch wenig bekannte **Fingermultiplikation** hingewiesen, die schon in arabischen Lehrbüchern des 16. Jahrhunderts zu finden ist und noch von rumänischen und französischen Bauern sowie in Indien, Irak und Nordafrika für Multiplikationen der Zahlen 6-9 angewandt wurde. Nach einem Milchmädchen des Berliner Milchhandels Bolle des ausgehenden 19. Jahrhunderts soll sie auch als Milchmädchenrechnung bezeichnet werden.

PC

EntwicklungWww-MitDenHaendenMultiplizieren



Aufgabe:	$9 \cdot 7$
gestreckte Finger:	$(4+2)\cdot 10 = 6 \cdot 10 = 60$
eingeklappte Finger:	$1 \cdot 3 = 3$
Summe beider Teilrechnungen:	$60 + 3 = 63$

Abbildung 1.43: Fingermultiplikation

Multiplikationen der Zahlen 1-5 mit einer derselben werden dabei als *einfach* vorausgesetzt, ist es doch möglich sie noch durch fortgesetzte Addition zu lösen und auswendig zu lernen. Zunächst wird am Handabakus, wie er auch genannt wird, die Aufgabe eingestellt. Die linke Hand zeigt den ersten Faktor um fünf vermindert an, die rechte den zweiten um fünf verminderten Faktor. Die Anzahlen der ausgestreckten Finger beider Hände sind dann zu addieren und mit 10 zu multiplizieren. Da hinzu gilt es noch das Produkt der Anzahlen der eingeklappten Finger der linken Hand mit der der rechten zu addieren.
Mathematisch ausgedrückt und bewiesen sieht das dann so aus:

Es seien l und r aus $\{6,7,8,9,10\}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left[(l-5)+(r-5)\right]\cdot 10+\left[(10-l)\cdot(10-r)\right]\\
&=\left[l+r-10\right]\cdot 10+\left[100-10l-10r+lr\right]\\
&=10l+10r-100+100-10l-10r+l\cdot r\\
&=l\cdot r
\end{aligned}$$

▪

2 Stellenwertsysteme mit unterschiedlichen Basen

2.1 Orientierung in ausgewählten Stellenwertsystemen

Bei unseren alltäglichen Überlegungen zu Zahlsystemen orientieren wir uns an einem Stellenwertsystem mit zehn Ziffern, dem Dezimalsystem. Es umfasst die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, und 9. Es ist das Stellenwertsystem, indem wir in unserem Kulturkreis traditionell arbeiten und denken. In den folgenden Ausführungen soll das Dezimalsystem Ausgangspunkt unserer Überlegungen sein.

Was bedeutet die Ziffernfolge 2, 0 und 7 im Dezimalsystem? Wie ist die Konvention? Die Basis dieses Stellenwertsystems ist die Zahl 10. Jede Stelle repräsentiert eine ganzzahlige Potenz von 10. Ganz links steht die größte, ganz rechts die kleinste ganzzahlige Potenz von 10, also die 10^0. 10^0 wird als Einer-Stelle, 10^1 als Zehner-Stelle, 10^2 als Hunderter-Stelle usw. bezeichnet (Abb. 2.1: Das Dezimalsystem).

Name	Milliarden	100-Millionen	10-Millionen	Millionen	100-Tausender	10-Tausender	Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	Zehntel	Hundertstel	Tausendstel	10-Tausendstel	100-Tausendstel
Stellen-schreibweise	1 000 000 000	100 000 000	10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1 000	100	10	1	0,1	0,01	0,001	0,000 1	0,000 01
Potenz-schreibweise	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}

Abbildung 2.1: Das Dezimalsystem

Analysiert man die Ziffernfolge 207 weiter, so stellen jede Ziffern dar, wie oft der Stellenwert vorkommt. In unserem Beispiel bedeutet das: 2 mal 10^2, also 200, Null mal 10^1, also 0 und 7 mal 10^0, also 7. Addiert ergeben die Stellenwerte die Zahl 207 im Dezimalsystem, oder auch 207_{10}. Hier eine andere Darstellung:

$$207_{10} = 2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 = 2 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

Entsprechend ist im Dezimalsystem 10^{-1} als Zehntel-Stelle, 10^{-2} als Hundertstel-Stelle, 10^{-3} als Tausendstel-Stelle usw. zu interpretieren (Abb. 2.1: Das Dezimalsystem). Auch hier steht der höchste Zahlwert am weitesten links. Zwischen den Einern und Zehnteln wird ein Komma gesetzt[48]. Die dezimale Kommazahl $689{,}046_{10}$ bedeutet:

$$\begin{aligned} 689{,}046_{10} &= 6\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0 + 0\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} + 6\cdot 10^{-3} \\ &= 6\cdot 100 + 8\cdot 10 + 9\cdot 1 + 0\cdot 0{,}1 + 4\cdot 0{,}01 + 6\cdot 0{,}001 \end{aligned}$$

UmrechnungDidak-tikNach10

In einem 7er-Stellenwertsystem ist die Basis die Zahl 7. Es kann hier also nur 7 Ziffern geben, der Einfachheit halber benutzen wir die uns bekannten Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5 und 6. Die Zahl sieben muss dann als 10_7, die Zahl acht als 11_7 dargestellt werden usw.[49]. Die Zahl 6530_7 des 7er-Stellenwertsystems[50] hat entsprechend folgenden Wert im Dezimalsystem:

$$\begin{aligned} 6530_7 &= 6\cdot 7^3 + 5\cdot 7^2 + 3\cdot 7^1 + 0\cdot 7^0 \\ &= 6\cdot 343 + 5\cdot 49 + 3\cdot 7 + 0\cdot 1 \\ &= 2058 + 245 + 21 + 0 \\ &= 2324_{10} \end{aligned}$$

PC

Um-rechnungWwwWikipediaDualsystem

Neben dem Dezimalsystem spielen in der Realität nur zwei andere Stellenwertsysteme ein Rolle, das zur Basis 2 und zur Basis 16. Stellenwertsysteme zu diesen Basen werden in der Informatik und Digitaltechnik sinnvoll benötigt. - Im Dualsystem[51] gibt es nur die Ziffern Eins und Null. Da ein Computer letztlich nur eine gigantische Anhäufung von Schaltern ist, erklärt es sich realitätsnah aus den zwei möglichen Zuständen eines Schalters. Ein Schalter ist entweder an oder aus, bzw. ein Strom kann fließen oder nicht[52]. Es kann hier mathematisch folglich nur 2 Zahlzeichen geben, die Ziffern 0 und 1. Die dezimale Zahl 2_{10} muss dann als 10_2 dargestellt werden[53], die dezimale Zahl 3_{10} als 11_2, usw.. - Welchen Wert hat die duale Ziffernfolge 1110101_2 im Dezimalsystem?

---

[48] Im angelsächsischen Raum ist es ein Punkt, wie auch bei den meisten Taschenrechnern.

[49] 10_7 – sprich: eins-null-zur-Basis-7 / 11_7 – sprich: eins-eins-zur-Basis-7

[50] 6530_7 – sprich: sechs-fünf-drei-null-zur-Basis-7

[51] Der deutsche Philosoph und Mathematiker Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (01.07.1646 - 14.11.1716) stellte tiefgreifende mathematische Überlegungen zum Dualsystem an.

[52] Eine Kodierung des Informationsgehalts eines normalen Schalters, der den Zustand von Strom aus oder an haben kann, entspricht in der Informatik einem Bit.

[53] 10_2 – sprich: eins-null-zur-Basis-2

Umrechnung2Nach10

$$\begin{aligned}1110101_2 &= 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0\\ &= 1\cdot 64 + 1\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 1\cdot 1\\ &= 64 + 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1\\ &= 117_{10}\end{aligned}$$

Bei der Zahldarstellung in Stellenwertsystemen, die eine höhere Basis als 10 verwenden, bedürfte es eigentlich für jedes Zahlzeichen stets eines neuen Symbols. Unabhängig von der Frage, ob es Sinn macht in einem solchen Zahlsystem zu arbeiten, stellt sich die Frage nach der praktischen Handhabbarkeit dieser Symbole. Nicht zuletzt deshalb hat sich wohl kein Stellenwertsystem größer als auf der Basis 10 bei uns durchsetzen können. Eine Ausnahme bildet lediglich das Hexadezimalsystem.

Beim Hexadezimalsystem, das die Basis 16 hat, nutzt man die uns bekannten Ziffern von 0 bis 9. Als weitere Symbole werden die ersten großen Buchstaben unseres Alphabets, die Buchstaben A, B, C, D, E und F[54], verwendet. Die dezimale Zahl 16_{10} muss dann als 10_{16} dargestellt werden, die dezimale Zahl 17_{10} folglich als 11_{16} usw.. Die Ziffernfolge 6, C, 8 und B[55], also $6C8B_{16}$, hat folgenden Wert im Dezimalsystem:

$$\begin{aligned}6C8B_{16} &= 6\cdot 16^3 + 12\cdot 16^2 + 8\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0\\ &= 6\cdot 4096 + 12\cdot 256 + 8\cdot 16 + 11\cdot 1\\ &= 24576 + 3072 + 128 + 11\\ &= 27787_{10}\end{aligned}$$

UmrechnungWww-WikipediaSexagesimalsystem

Welche Ziffern werden in einem Stellenwertsystem zur Basis 60, dem Sexagesimalsystem, genutzt? Man könnte sich heute als erste Ziffern die 0 bis 9 denken, weiter die großen Buchstaben unseres Alphabets, also weitere 26 Ziffern. Der Rest der benötigten Ziffern könnten die 24 kleinen Buchstaben unseres Alphabets sein, ohne y und z[56]. Denkbar sind natürlich auch ganz neu ausgedachte Ziffernzeichen. Der Phantasie sind hier keine Grenzen gesetzt. Aber, in jedem Fall muss man sich 60 verschiedene Ziffern merken, um in einem 60er-

[54] „Seit Mitte der 1950er Jahre werden zur Darstellung der sechs zusätzlichen Ziffern die Buchstaben **A** bis **F** oder **a** bis **f** als Zahlzeichen verwendet. Dies geht auf die damalige Praxis der IBM-Informatiker zurück“ (in: www.wikipedia.de).

[55] Für Zahlen im Hexadezimalsystem sind keine eigenständigen Namen gebräuchlich. Hexadezimalzahlen werden daher Ziffer für Ziffer von links nach rechts gelesen.

[56] Zu bedenken ist die Verwechselungsgefahr des großen Buchstabens „O“ sowie des kleinen Buchstabens „o“ mit der Null.

Stellenwertsystem rechnen zu können. Im alten Babylonien hat man sich aus der Affäre gezogen, indem die Symbole für 1-59 aus Winkelkeilen mit dem Wert 10 und Vertikalpfeilen mit dem Wert 1 additiv zusammengesetzt wurden. Dadurch, dass sich alle Keile berührten, waren sie als ein Symbol zu erkennen. Für die Null wurden zwei Winkelkeile nicht verbunden übereinander gesetzt[57].

Ü

OrientierungUebung-Stellenwertsysteme

2.2 Umwandlung von Zahlen zwischen verschiedenen Stellenwertsystemen

Was bedeutet die Ziffernfolge 2, 0 und 7 in verschiedenen Stellenwertsystemen? Da die Ziffer 7 vorkommt, kann eine Betrachtung erst ab einem Stellenwertsystem zur Basis 8 erfolgen. Stellenwertsysteme mit kleinerer Basis können nicht über diese Ziffer verfügen. Hier Beispiele der Umrechnung von Stellenwertsystemen zu unterschiedlichen Basen ins Dezimalsystem:

UmrechnungDidaktikNach10

$$207_8 = 2\cdot 8^2 + 0\cdot 8^1 + 7\cdot 8^0 = 2\cdot 64 + 0\cdot 8 + 7\cdot 1 = 71_{10}$$
$$207_9 = 2\cdot 9^2 + 0\cdot 9^1 + 7\cdot 9^0 = 2\cdot 81 + 0\cdot 9 + 7\cdot 1 = 169_{10}$$
$$207_{11} = 2\cdot 11^2 + 0\cdot 11^1 + 7\cdot 11^0 = 2\cdot 121 + 0\cdot 11 + 7\cdot 1 = 249_{10}$$
$$207_{12} = 2\cdot 12^2 + 0\cdot 12^1 + 7\cdot 12^0 = 2\cdot 144 + 0\cdot 12 + 7\cdot 1 = 295_{10}$$
$$207_{16} = 2\cdot 16^2 + 0\cdot 16^1 + 7\cdot 16^0 = 2\cdot 256 + 0\cdot 16 + 7\cdot 1 = 519_{10}$$
$$207_{25} = 2\cdot 25^2 + 0\cdot 25^1 + 7\cdot 25^0 = 2\cdot 625 + 0\cdot 25 + 7\cdot 1 = 1257_{10}$$
$$207_{60} = 2\cdot 60^2 + 0\cdot 60^1 + 7\cdot 60^0 = 2\cdot 3600 + 0\cdot 60 + 7\cdot 1 = 7207_{10}$$

Bei der Umrechnung vom Dual- in das Dezimalsystem geht man entsprechend vor wie oben beschrieben. Beispiel:

Umrechnung2Nach10

$$\text{Fragestellung:}\, 10101100_2 = ?_{10}$$
$$\begin{aligned} 10101100_2 &= 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 \\ &= 1\cdot 128 + 0\cdot 64 + 1\cdot 32 + 0\cdot 16 + 1\cdot 8 + 1\cdot 4 + 0\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ &= 172_{10} \end{aligned}$$

Lösung: 10101100_2 **= $\mathbf{172_{10}}$**

Zur Umrechnung zwischen verschiedenen Stellenwertsystemen[58] gibt es zwei mathematische Algorithmen, den „Ausschöpfungsalgorithmus“, sowie den der „Umrechnung durch fortgesetztes Teilen“[59]. Bei der Umrechnung zwischen zwei Stellenwertsystemen, bei denen kei-

[57] Siehe dazu: Kapitel 1.1.2 Babylonier

[58] Die von Excel genutzten Umrechnungsalgorithmen findet man hier (Stand: September 2009): http://www.excelformeln.de/formeln.html?gruppe=18

[59] auch Divisionsmethode

nes zur Basis 10 ist, empfiehlt es sich das uns gebräuchliche Dezimalsystem stets als Zwischenschritt der Umrechnung zu verwenden.

Def!

UmrechnungDidaktikAlgorithmusVon10Ausschoepfen

UmrechnungDidaktikVon10AusschoepfenSchrittweise

Das Prinzip des Ausschöpfungsalgorithmus ist das schrittweise Teilen durch die höchst mögliche Potenz zur Basis des Zielstellenwertsystems. Wie wird dieser Algorithmus durchgeführt? Ein Beispiel, soll die dezimale 207_{10} in das Dualsystem umgerechnet werden, dann sucht man sich als ersten Divisor[60] die höchst mögliche Potenz von 2, die ganzzahlig in den Dividenden 207 passt. Es ist $2^7 = 128$. Der Algorithmus ist beendet, wenn als letzte Rechenoperation mit der Basis und dem Exponenten Null[61] dividiert wurde. Die Zahl im Dualsystem setzt sich nun aus den einzelnen Quotienten der Iterationen zusammen und baut sich von oben nach unten auf. Das Ergebnis lautet folglich 11001111_2.

Fragestellung: $207_{10} = \mathbf{?_2}$

1. Iteration:	$207 : 2^7 = 207 : 128$	=	**1**	Rest 79
2. Iteration:	$79 : 2^6 = 79 : 64$	=	**1**	Rest 15
3. Iteration:	$15 : 2^5 = 15 : 32$	=	**0**	Rest 15
4. Iteration:	$15 : 2^4 = 15 : 16$	=	**0**	Rest 15
5. Iteration:	$15 : 2^3 = 15 : 8$	=	**1**	Rest 7
6. Iteration:	$7 : 2^2 = 7 : 4$	=	**1**	Rest 3
7. Iteration:	$3 : 2^1 = 3 : 2$	=	**1**	Rest 1
8. Iteration:	$1 : 2^0 = 1 : 1$	=	**1**	Rest 0

Lösung: $207_{10} = \mathbf{11001111_2}$

Ein mathematisches Problem stellt hier die Darstellung mit „Rest“ dar[62]. - Als weiteres Beispiel soll die dezimale 308_{10} in das Stellenwertsystem zur Basis 7 umgerechnet werden. Der erste Divisor ist die höchst mögliche Potenz von 7, die ganzzahlig in den Dividenden 308 passt. Der Algorithmus ist wiederum beendet, wenn als letzte Division 7^0 ausgeführt wurde. Die Zahl im 7er-Stellenwertsystem baut sich wiederum aus den Quotienten der Iterationen von oben nach unten auf. Das Ergebnis lautet folglich 620_7.

Fragestellung: $308_{10} = \mathbf{?_7}$

1. Iteration:	$308 : 7^2 = 308 : 49$	=	**6**	Rest 14
2. Iteration:	$14 : 7^1 = 14 : 7$	=	**2**	Rest 0
3. Iteration:	$0 : 7^0 = 0 : 1$	=	**0**	Rest 0

Lösung: $308_{10} = \mathbf{620_7}$

---

[60] Zur Terminologie: „Dividend geteilt durch den Divisor ist gleich der Quotient.“ oder: „Dividend : Divisor = Quotient“

[61] b^0

[62] Die Problematik wird bei der noch folgenden „Umrechnung durch fortgesetztes Teilen“ näher erläutert.

UmrechnungDidaktikAlgorithmusVon10FortgesetztesTeilen

UmrechnungDidaktikVon10FortgesetztesTeilenSchrittweise

Bei dem Algorithmus der „Umrechnung durch fortgesetztes Teilen“[63], ist das Prinzip die fortgesetzte Division durch die Basis des anderen Zielstellenwertsystems. Betrachtet wird hier der jeweilige Rest der Division. Es ist als Multiplikation darzustellen, da eine Divisionsdarstellung nicht eindeutig ist. Ein Beispiel, das Ergebnis „2 Rest 5“ ist nicht gleich „2 Rest 5“, denn es kann unterschiedlich zustande gekommen sein. Z.B. als Ergebnis der Aufgaben 19 : 7 oder 17 : 6. Es gilt folglich: $a = q \cdot g + r$ mit $a, g, q, r \in \mathbb{N}$[64].

Wie wird dieser Algorithmus praktisch durchgeführt? Ein Beispiel: Soll die dezimale 207_{10} in das Dualsystem umgerechnet werden, dann wird der Dividend 207 durch den Divisor 2 dividiert[65]. Der Quotient der Rechnung wird ganzzahlig und mit seinem Rest aufgeschrieben. Der Quotient der ersten Iteration ist der Dividend bei der zweiten Iteration. Der Divisor ist stets die Zahl 2. Wieder wird der Quotient der Rechnung ganzzahlig und mit seinem Rest aufgeschrieben usw. Bei diesem Algorithmus kommt dem Rest eine entscheidende Bedeutung zu. Der Algorithmus ist beendet, wenn ein Faktor Null wird (Abb. 2.2: Umrechnung ins Dualsystem). Das Ergebnis, die Zahl im Dualsystem, ergibt sich von unten nach oben gelesen[66]. Es lautet folglich 11001111_2.

UmrechnungNach2FortgesetztesTeilen

Zahl im Dezimalsystem:	**im Dualsystem:**
207	**1 1 0 0 1 1 1 1**

Iteration								
1	207	=	103	·	2	+	1
2	103	=	51	·	2	+	1
3	51	=	25	·	2	+	1
4	25	=	12	·	2	+	1
5	12	=	6	·	2	+	0
6	6	=	3	·	2	+	0
7	3	=	1	·	2	+	1
8	1	=	0	·	2	+	1

Abbildung 2.2: Umrechnung ins Dualsystem

[63] auch Divisionsmethode

[64] g = Basis des g-adischen Stellenwertsystems, r = Divisionsrest

[65] Da die Division in der Zahlentheorie über die Multiplikation hergeleitet wird, ist die Rechnung als Multiplikation dargestellt.

[66] Es ist damit anders zu handhaben als beim „Ausschöpfungsalgorithmus“.

Ein weiteres Beispiel: Soll die dezimale 207_{10} in das 5er-Stellenwertsystem umgerechnet werden, dann wird der Dividend 207 durch den Divisor 5 dividiert. Der Quotient der Rechnung wird wiederum ganzzahlig und mit seinem Rest aufgeschrieben. Der Quotient der ersten Iteration ist der Dividend der zweiten Iteration. Der Divisor ist stets die Zahl 5. Wieder wird der Quotient der Rechnung ganzzahlig und mit seinem Rest aufgeschrieben usw. Der Rest ergibt von unten nach oben gelesen die Zahl im 5er-Stellenwertsystem. Das Ergebnis der Umrechnung ist die 1312_5 (Abb. 2.3: Umrechnung ins 5er-Stellenwertsystem).

UmrechnungDurch-FortgesetztesTeilen-10In5

Zahl im Dezimalsystem: **im 5er-Stellenwertsystem:**

207 **1 3 1 2**

Iteration								
1	207	=	41	·	5	+	2
2	41	=	8	·	5	+	1
3	8	=	1	·	5	+	3
4	1	=	0	·	5	+	1

Abbildung 2.3: Umrechnung ins 5er-Stellenwertsystem

Bei der Umrechnung von Zahlen zwischen g-adischen Stellenwertsystemen, deren Grundzahl (g) mit der gleichen Basis darzustellen ist, ergibt sich ein besonderer mathematischer Zusammenhang. Er sei am Beispiel von vier g-adischen Stellenwertsystemen exemplarisch dargestellt, wo gilt $g = 2^k$ mit $k \in \{1,2,3,4\}$ (Abb. 2.4: Stellenwertsysteme zur Basis 2). Es handelt sich hier um die Stellenwertsysteme:

2^1 = Stellenwertsystem zur Basis 2 => Dualsystem
2^2 = Stellenwertsystem zur Basis 4 => 4er-Stellenwertsystem
2^3 = Stellenwertsystem zur Basis 8 => Oktalsystem[67]
2^4 = Stellenwertsystem zur Basis 16 => Hexadezimalsystem

[67] Das Oktalsystem fand früher in der Informatik eine Anwendung.

Es gilt folgender grundsätzlicher Zusammenhang:

Zahldarstellung				
2^1	2^2	2^3	2^4	10^1
2er	4er	8er	16er	10er
dual	4er	oktal	hexadezimal	dezimal
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
10	2	2	2	2
11	3	3	3	3
100	10	4	4	4
101	11	5	5	5
110	12	6	6	6
111	13	7	7	7
1000	20	10	8	8
1001	21	11	9	9
1010	22	12	A	10
1011	23	13	B	11
1100	30	14	C	12
1101	31	15	D	13
1110	32	16	E	14
1111	33	17	F	15

Abbildung 2.4: Stellenwertsysteme zur Basis 2

Die Umwandlung einer binären Zahl in das 4er-Stellenwertsystem sei als erstes beispielhaft dargestellt. Die binäre Zahl wird zuerst von rechts nach links in eine binäre Ziffernfolge mit zwei Ziffern eingeteilt, denn der Exponent des Zielstellenwertsystems ist 2, da $4 = 2^2$. Nun werden die Partner zu den Zweiergruppen aus dem Dual- dem 4er-Stellenwertsystem eineindeutig zugeordnet (Abb. 2.5: Zahlumwandlung zur Basis 2). Ein Beispiel:

Fragestellung: $11011110_2 = \mathbf{?}_4$
1. Schritt: $11011110_2 = 11\text{-}01\text{-}11\text{-}10_2$
2. Schritt: $11011110_2 = \mathbf{3\text{-}1\text{-}3\text{-}2}_4$
Lösung: $11011110_2 = \mathbf{3132}_4$

Die Umrechnung vom 4er-Stellenwertsystem in das Dualsystem ist adäquat vorzunehmen. Hier werden bei Bedarf Nullen voran gestellt.

Zahldarstellung	
2^1	2^2
2er	**4er**
dual	**4er**
00	0
01	1
10	2
11	3

Zahldarstellung	
2^1	2^3
2er	**8er**
dual	**oktal**
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7

Zahldarstellung	
2^1	2^4
2er	**16er**
dual	**hexadezimal**
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

Abbildung 2.5: Zahlumwandlung zur Basis 2

Bei der Umwandlung einer binären Zahl in das Oktalsystem wird die binäre Zahl in einem ersten Rechenschritt von rechts nach links in eine binäre Ziffernfolge mit drei Ziffern eingeteilt[68]. Nun werden die Partner zu den Dreiergruppen aus dem Dual- dem Oktalsystem ein-eindeutig zugeordnet (Abb. 2.5: Zahlumwandlung zur Basis 2)[69]. Ein Beispiel:

Fragestellung: $1111001101_2 = \mathbf{?}_8$
1. Schritt: $1111001101_2 = 001\text{-}111\text{-}001\text{-}101_2$
2. Schritt: $1111001101_2 = \mathbf{1\text{-}7\text{-}1\text{-}5}_8$
Lösung: $1111001101_2 = \mathbf{1715}_8$

Soll man zwischen zwei Stellenwertsystemen zur gleichen Basis (g) umgerechnet werden, wobei keines den Exponenten 1 hat, so ist der erste Rechenschritt stets die Umwandlung in das Stellenwertsystem mit dieser Basis sowie dem Exponenten 1, also g^1. Ausgehend von dem b^1er-Stellenwertsystem kann die Zahl im zweiten Schritt in ein anderes Stellenwertsystem dieser Basis komfortabel umrechnet werden.

[68] Der Grund liegt in dem mathematischen Zusammenhang von $8 = 2^3$.

[69] Die Umrechnung vom Oktal- in das Dualsystem ist adäquat vorzunehmen. Hier werden bei Bedarf Nullen voran gestellt.

Als Beispiel sei die Umwandlung einer Zahl des Oktalsystems[70] in eine hexadezimale Zahl dargestellt. Die Oktalzahl wird als erstes von rechts nach links in eine binäre Ziffernfolge mit jeweils drei Ziffern umgewandelt (Abb. 2.4: Stellenwertsysteme zur Basis 2)[71]. Hier werden bei Bedarf Nullen voran gestellt, so dass 3er-Zahlengruppen entstehen. Als nächstes werden die binären Ziffernfolgen neu, und zwar in Vierergruppen von rechts nach links, eingeteilt[72]. Nun werden die Partner zu den Vierergruppen aus dem Dual- dem Hexadezimalsystem eineindeutig zugeordnet (Abb. 2.5: Zahlumwandlung zur Basis 2). Ein Beispiel:

Bsp.

Fragestellung: $46176_8 = \mathbf{?_{16}}$

1. Schritt: $46176_8 =$

$4_8 = 100_2$
$6_8 = 110_2$
$1_8 = 001_2$
$7_8 = 111_2$
$6_8 = 110_2$

2. Schritt: $46176_8 = 100\text{-}110\text{-}001\text{-}111\text{-}110_2$

3. Schritt: $46176_8 = 0100\text{-}1100\text{-}0111\text{-}1110_2$

4. Schritt: $46176_8 = \mathbf{4\text{-}C\text{-}7\text{-}E}_{16}$

Lösung: $46176_8 = \mathbf{4C7E}_{16}$

Ü

OrientierungUebung-Umwandlung

[70] Das Oktalsystem fand früher in der Informatik eine Anwendung.

[71] Der Grund liegt in dem mathematischen Zusammenhang von $8 = 2^3$.

[72] Der Grund liegt in dem mathematischen Zusammenhang von $16 = 2^4$.

3 Rechenoperationen in Stellenwertsystemen

Das Rechnen im 10er-System haben wir automatisiert. Wenn wir schriftliche Rechenverfahren anwenden sind uns die zu Gunde liegenden Algorithmen oft nicht mehr bewusst. Um in anderen Stellenwertsystemen zu rechnen ist es notwendig sich den mathematischen Hintergrund der einzelnen Rechenschritte wieder ins Gedächtnis zu rufen. Was sind Rechenvorteile im 10er-System und warum? Wie lassen sie sich auf ein anderes System übertragen?

3.1 Addition

3.1.1 Addition im 10er-System

Schule

Info

RechnenInfoAddition1

Ü

RechnenUebungAddition

Für einen überschaubaren Zahlenraum (das kleine 1+1) gilt, dass zahlenmäßig begrenzte Additionsaufgaben so lange geübt werden, bis die Ergebnisse auswendig wiedergegeben werden können. Dabei sind solche Aufgaben wichtiger als andere, die dazu dienen andere Aufgaben schneller zu lösen (z.B. Ergänzen zu 10, Verdoppeln).

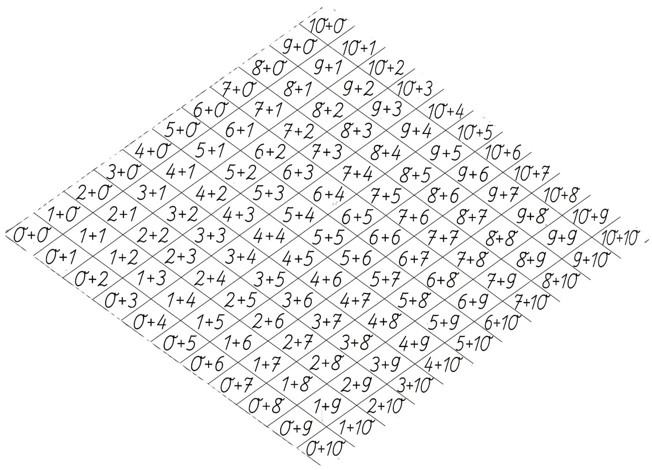


Abbildung 3.1: 121 Aufgaben des kleinen 1+1 [1]

Schule

Bsp.

RechnenInfoAddition2

Wird der Zahlenraum erweitert und die Anzahl der (Additions-) Aufgaben zu groß um sie auswendig zu lernen, setzen die halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren ein. In Stellenwertsystemen wird stellenweise addiert und gebündelt (ein Übertrag gebildet).

[1] aus: Das Zahlenbuch 1, Rückseite, Klett-Verlag

3.1.2 Addition in anderen Stellenwertsystemen

Das Rechnen in anderen Stellenwertsystemen versetzt uns in die Lage unserer Schüler. Schon das Zählen geht uns nicht so leicht von der Hand und die Verknüpfungstabellen sind uns nicht geläufig.

Wir addieren z.B. im 4er-System $132_{(4)}$ + $212_{(4)}$ wie folgt stellenweise von rechts nach links mit Hilfe der 1 + 1-Tabelle:

2 + 2 = 10	schreibe **0** an die Position 4^1 übertrage 1 an die Position 4^2
3 + 1 + 1 = 11	schreibe **1** an die Position 4^1 übertrage 1 an die Position 4^2
1 + 2 + 1 = 10	schreibe **0** an die Position 4^2 übertrage 1 an die Position 4^3
0 + 1	schreibe **1** an die Position 4^3

$+_{(4)}$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

	4^3	4^2	4^1	4^0
		1	3	2
+		2	1	2
	1	1	1	
	1	0	1	0

Das Ergebnis ist $1010_{(4)} = 68_{(10)}$.

3.2 Subtraktion

Info

RechnenInfoSubtraktion

Subtraktionsaufgaben werden schriftlich durch Abziehen oder durch Ergänzen gelöst. Dabei gibt es die Verfahren des Erweiterns und des Entbündelns, so dass eine Subtraktionsaufgabe auf viererlei Art gelöst werden kann (Näheres nebenstehend unter „Info“).

3.2.1 Subtraktion im Dezimalsystem

Bedient man sich bei der Subtraktion des Ergänzungsverfahrens, so ist das Vorgehen im Prinzip dasselbe wie bei der Addition. Es wird stellenweise von rechts nach links ergänzt, in diesem Fall mit Entbündeln (analog zum Bündeln bei der Addition).

Beispiel: 543 – 128

	10^2	10^1	10^0
		3	13
	5	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$
-	1	2	8
	4	1	5

Gesprochen wird folgendermaßen:
„8 plus wie viel ist 3, geht nicht, ein Zehner in zehn Einer tauschen, dann habe ich 13 Einer und nur noch drei Zehner. 8 + **5** ist 13, 2 + **1** ist 3, 1 + **4** ist 5. Das Ergebnis ist 415."

Um das Ergänzungsverfahren sicher und schnell anzuwenden, ist das Beherrschen des kleinen 1 + 1 Voraussetzung. Dies erfahren wir, wenn wir in anderen Stellenwertsystemen subtrahieren.

3.2.2 Subtraktion in anderen Stellenwertsystemen

Def!
RechnenDidaktikAlgorithmusSubtraktionErgEntb

Wir subtrahieren wieder durch Ergänzen mit Entbündeln, diesmal aber im 4er-System. Die Aufgabe lautet $1010_{(4)} - 212_{(4)}$ (Kontrollaufgabe zu Aufgabe aus 1.1.2).

	4^3	4^2	4^1	4^0
	0	3 $\cancel{10}$	10 $\cancel{0}$	10
	$\cancel{1}$	0	$\cancel{1}$	$\cancel{0}$
-		2	1	2
		1	3	2

Die Rechenschritte im Einzelnen von rechts nach links:

2 + __ = 0 keine Lösung im Bereich $\mathbb{N}$, also Entbündeln eines Elementes des nächst höheren Stellenwertes

Def!
RechnenDidaktikAlgorithmusSubtraktionAbzEntb

2 + **2** = 10 schreibe 2 an Position 4^0

1 + __ = 0 keine Lösung im Bereich $\mathbb{N}$, Entbündeln des nächst höheren Stellenwertes nicht möglich, da kein Element vorhanden, also Entbündeln von $1 \cdot 4^3$ in $10 \cdot 4^2$, davon 1en 4^2er entbündeln in $10 \cdot 4^1$, es bleiben $3 \cdot 4^2$ übrig.

Def!
RechnenDidaktikAlgorithmusSubtraktionErgErw

1 + **3** = 10 schreibe 3 an Position 4^1

2 + **1** = 3 schreibe 1 an Position 4^2

Def!
RechnenDidaktikAlgorithmusSubtraktionAbzErw

Das Ergebnis ist wie erwartet $132_{(4)}$.
An diesem Beispiel wird ein Nachteil des Entbündelns deutlich: Bei mehreren 0-Stellen des Minuenden muss für einen Rechenschritt mehrfach entbündelt werden.

3.3 Multiplikation

Die Multiplikation wird aus dem Alltag hergeleitet als fortgesetzte Addition. (Ich würfle fünfmal eine sechs. Ich gehe dreimal in den Keller und bringe jedes Mal 4 Flaschen Bier mit.) Werden die Zahlen größer wird stellenweise halbschriftlich multipliziert ($4 \cdot 387 = 4 \cdot 300 + 4 \cdot 80 + 4 \cdot 7$). Für die schriftliche Multiplikation braucht man das kleine 1 x 1 des jeweiligen Stellenwertsystems und muss es sicher beherrschen um schnell zu einem Ergebnis zu kommen.

3.3.1 Multiplikation im Dezimalsystem

Schule

RechnenInfoMultiplikation

Bei der schriftlichen Multiplikation wird stellenweise multipliziert, die Überträge werden behalten oder über dem jeweiligen Stellenwert des Multiplikanden notiert.

Beispiel:

H	Z	E		Z	E
1 1	2 3				
3	2	7	·	5	4
	1	6	3	5	
		1	3	0	8
	1	7	6	5	8

3.3.2 Multiplikation in anderen Stellenwertsystemen

Info

RechnenDidaktikAlgorithmusMultiplikation

In anderen Stellenwertsystemen ist uns das kleine 1 x 1 nicht so geläufig, entsprechend schwierig gestaltet sich die schriftliche Multiplikation.

Beispiel aus dem 5er-System: $123_5 \cdot 234_5$

Um diese Aufgabe zu lösen brauchen wir die 1 x 1 – Tabelle des 5er-Systems.

$\cdot_{(5)}$	0	1	2	3	4	10
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	10
2	0	2	4	11	13	20
3	0	3	11	14	22	30
4	0	4	13	22	31	40
10	0	10	20	30	40	100

1	2	3	(5)	·	2	3	4	(5)
			3	0	1			
				4	2	4		
				1	1	0	2	
			4	0	4	4	2	(5)

Zur Kontrolle rechnen wir die gleiche Aufgabe im Dezimalsystem:

3	8	(10)	·	6	9	(10)
		2	2	8		
			3	4	2	
		2	6	2	2	(10)

$2622_{(10)} = 40442_{(5)}$

3.4 Division

Das Divisionsverfahren ist am besten geeignet mögliche Schwierigkeiten der Schüler vor Augen zu führen, da der Divisionsalgorithmus aufwändiger ist, als die der vorangegangenen drei Rechenverfahren und eine sicheres Subtrahieren und Multiplizieren voraussetzt.

3.4.1 Division im Dezimalsystem

Wir beschränken uns hier auf Aufgaben mit einstelligem Divisor ohne Rest. Um zu verdeutlichen welche gedanklichen Schritte der Reihe nach vollzogen werden müssen, im Folgenden eine ausführliche Dokumentation einer Divisionsaufgabe:

4 0 5 8 4 : 8		Gesprochen/gedacht wird:
4		4 ZT können nicht an 8 verteilt werden.
4 0	5	$4 \cdot 10000 + 0 \cdot 1000$ sind $40 \cdot 1000$ 40 Tausender verteilt an 8 sind 5 Tausender, nichts bleibt übrig.
5	0	5 H können nicht an 8 verteilt werden, schreibe 0, 5 Hunderter bleiben übrig.
5 8	7	$5 \cdot 100 + 8 \cdot 10$ sind $58 \cdot 10$, 58 Zehner verteilt an 8 sind 7, 2 Zehner bleiben übrig.
2 4	3	2 Zehner + 4 Einer sind 24 Einer, 24 Einer verteilt an 8 sind 3.

Natürlich laufen diese Zwischenrechnungen bei geübten Rechnern sehr schnell und nicht mehr bewusst ab, so dass diese das Ergebnis sozusagen „ablesen“ können.

3.4.2 Division in anderen Stellenwertsystemen

Deutlich werden die Zwischenschritte wenn man in einem anderen Stellenwertsystem dividiert. Dividiert man z.B. im 5er-System durch 3 so braucht man die 3er-Reihe aus der Multiplikationstabelle des 5er-Systems. Außerdem sollten die Subtraktionsergebnisse der 1+1-Tafel$_{(5)}$ geläufig sein. Rechnen Sie z.B. $13203_{(5)} : 3$

$13203_{(5)} : 3 = 2401$ aus der 1x1-Tabelle entnehmen Sie, dass

$13 = 2 \cdot 3 + 2$

$2 \cdot 3 = 11$, $13 - 11 = 2$

$22 : 3 = 4$, $4 \cdot 3 = 22$, kein Rest

$0 : 3 = 0$

$3 : 3 = 1$

Zur Sicherheit die Probe: $2401_{(5)} \cdot 3 = 13203$.

4 Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn auch ihre Quersumme durch 9 teilbar ist. Jeder hat diese und weitere Teilbarkeitsregeln in der Schule gelernt. In diesem Kapitel wollen wir darstellen, dass es für alle aus der Schule bekannten Teilbarkeitsregeln eine gemeinsame Betrachtungsweise gibt. Wir werden dies am Beispiel der Zahlen 9, 11, 7 und 4 untersuchen. Am Ende des Kapitels werden wir der Frage nachgehen, ob sich Teilbarkeitsregeln aus dem Zehnersystem auf andere Systeme übertragen lassen.

4.1 Definition der Kongruenz

Eine Aufgabe an der Zahlengeraden

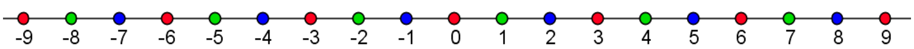


Abb. 4.1: Ausschnitt aus der Zahlengeraden

Wenn man den obigen Ausschnitt aus der Zahlengeraden nach beiden Seiten unbegrenzt fortsetzt, dann kann man die roten Zahlen so beschreiben:

Eine ganze Zahl a ist genau dann rot,
- wenn sie durch 3 teilbar ist.
- wenn beim Teilen durch 3 der Rest 0 bleibt.
- wenn sie ein Vielfaches von 3 ist.
- wenn sie sich in der Form $3 \cdot s$ mit $s \in \mathbb{Z}$ schreiben lässt. $(*)$
- wenn es eine ganze Zahl s mit $a = s \cdot 3$ gibt.

Wegen $(*)$ wird die Menge aller roten Zahlen mit $3\mathbb{Z}$ bezeichnet.

L

twsLoesungBunte-Zahlengerade

1. Beschreiben Sie die blauen Zahlen.
2. Beweisen Sie: Die Summe zweier blauer Zahlen ist grün.
   Die Differenz zweier blauer Zahlen ist rot.

Satz.

Satz
Für zwei ganze Zahlen a und b und eine natürliche Zahl m sind folgende Aussagen gleichwertig:
(i) a und b haben bezüglich m denselben Rest.
(ii) m ist Teiler der Differenz aus a und b.

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Wenn a bezüglich m den Rest r hat, dann unterscheidet sich a von einem passenden Vielfachen von m gerade um diese Zahl r. Es gibt

also eine ganze Zahl s mit $a = s \cdot m + r$. Entsprechend gibt es zu b eine ganze Zahl t mit $b = t \cdot m + r$. Es folgt:

$$\begin{aligned} a - b &= (s \cdot m + r) - (t \cdot m + r) \\ &= s \cdot m + r - t \cdot m - r \\ &= s \cdot m - t \cdot m \\ &= (s - t) \cdot m \end{aligned}$$

Also ist $a - b$ ein Vielfaches von m. Mit anderen Worten: m ist ein Teiler von $a - b$.
(ii) $\Rightarrow$ (i)
Wenn m ein Teiler von $a - b$ ist, dann ist $a - b$ ein Vielfaches von m. Es gibt also eine ganze Zahl s mit $a - b = s \cdot m$. Hat nun a bezüglich m den Rest r, dann lässt sich a schreiben als $a = t \cdot m + r$ mit einer passenden ganzen Zahl t. Es folgt:

$$\begin{aligned} b &= a - a + b \\ &= a - (a - b) \\ &= (t \cdot m + r) - s \cdot m \\ &= t \cdot m - s \cdot m + r \\ &= (t - s) \cdot m + r \end{aligned}$$

Also hat auch b bezüglich m den Rest r. ■

Def!

Definition
Zwei ganze Zahlen a und b heißen kongruent bezüglich einer natürlichen Zahl m, wenn a und b beim Teilen durch m denselben Rest haben.

Diese Definition geht auf Carl Friedrich Gauss zurück.[73] Er nennt die natürliche Zahl m in diesem Zusammenhang den Modul[74] und schreibt die Kongruenz von a und b nach dem Modul m in der Form $a \equiv b \,(\text{mod}\,.\, m)$. Den Punkt lässt man heute weg. $a \equiv b \,(\text{mod}\, m)$ wird gesprochen "a kongruent b nach dem Modul m", "a kongruent b modulo m" oder auch "a kongruent b in Bezug auf m". Ist aus dem Zusammenhang klar, welcher Modul der Kongruenz zu Grunde liegt, so schreibt man einfach $a \equiv b$.

Beispiele

$12 \equiv 37 \,(\text{mod } 5)$;	denn 12 und 37 haben bezüglich 5 denselben Rest 2; denn $12 : 5 = 2$ Rest 2 und $37 : 5 = 7$ Rest 2.
$12 \equiv 37 \,(\text{mod } 5)$;	denn $5 \mid 12 - 37$; denn $12 - 37 = -25$.
$-5 \equiv 22 \,(\text{mod } 3)$;	denn -5 und 22 haben bezüglich 3 denselben Rest 1; denn $-5 = (-2) \cdot 3 + 1$ und $22 = 7 \cdot 3 + 1$.
$-5 \equiv 22 \,(\text{mod } 3)$;	denn $3 \mid -5 - 22$; denn $-5 - 22 = -27$.

[73] Carl Friedrich Gauss' Untersuchungen über höhere Arithmetik (Disquisitiones arithmeticae ...) Deutsch von H. Maser, Berlin 1889, 1. Abschnitt
[74] modulus (lat) - Maß

Aus der Definition lässt sich eine große Ähnlichkeit zwischen Gleichheitszeichen $(=)$ und Kongruenzzeichen $(\equiv)$ ablesen.

Gleichheitszeichen	Kongruenzzeichen	
$a = a$	$a \equiv a$	Reflexivität
$a = b \Rightarrow b = a$	$a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$	Symmetrie
$a = b \wedge b = c \Rightarrow a = c$	$a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$	Transitivität

4.2 Rechnen mit Kongruenzen

Die Ähnlichkeit zwischen Gleichheit und Kongruenz weitet sich über die obige Tabelle hinaus auf die Grundrechenarten aus. Beim Umformen von Gleichungen verwenden wir bezogen auf die Grundrechenarten die folgenden Aussagen.

- Zu beiden Seiten einer Gleichung kann man die gleiche Zahl addieren.
  Kurz: $a = b \quad \Rightarrow \quad a + c = b + c$
- Von beiden Seiten einer Gleichung kann man die gleiche Zahl subtrahieren.
  Kurz: $a = b \quad \Rightarrow \quad a - c = b - c$
- Beide Seiten einer Gleichung kann man mit der gleichen Zahl multiplizieren.
  Kurz: $a = b \quad \Rightarrow \quad a \cdot c = b \cdot c$
- Beide Seiten einer Gleichung kann man durch die gleiche Zahl $(\neq 0)$ dividieren.
  Kurz: $a = b \quad \Rightarrow \quad a : c = b : c \quad (c \neq 0)$

Abgesehen von der Division gelten für Kongruenzen genau die gleichen Implikationen.

Satz.

Satz
Es seien a, b, c und d ganze und m eine natürliche Zahl. Ferner seien c und d kongruent nach dem Modul m. Dann gelten:

- $a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a + c \equiv b + d \pmod{m}$ (1)
  Zu beiden Seiten einer Kongruenz kann man kongruente Zahlen addieren.
- $a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a - c \equiv b - d \pmod{m}$ (2)
  Von beiden Seiten einer Kongruenz kann man kongruente Zahlen subtrahieren.
- $a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$ (3)
  Beide Seiten einer Kongruenz kann man mit kongruenten Zahlen multiplizieren.

Beweis
Wegen $a \equiv b \pmod m$ und $c \equiv d \pmod m$ gibt es zwei ganze Zahlen s und t mit $a - b = s \cdot m$ und $c - d = t \cdot m$. Hiermit folgen

– $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)=s\cdot m+t\cdot m=(s+t)\cdot m$. Mithin gilt $a+c \equiv b+d \pmod m$.
– $(a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d)=s\cdot m-t\cdot m=(s-t)\cdot m$. Mithin gilt $a-c \equiv b-d \pmod m$.
– $a\cdot c-b\cdot d=a\cdot c-b\cdot c+b\cdot c-b\cdot d$
$=(a-b)\cdot c+b\cdot(c-d)=s\cdot m\cdot c+b\cdot t\cdot m=(s\cdot c+b\cdot t)\cdot m$.
Mithin gilt $a\cdot c \equiv b\cdot d \pmod m$. ■

Es ist jetzt alles zusammengetragen, um einen einheitlichen Blick auf die bekannten Teilbarkeitsregeln zu bekommen.

4.3 Teilbarkeitsregeln im Zehnersystem

Wir können zunächst die Teilbarkeitsregel für die Zahl 9 bestätigen. Dazu listen wir die Reste der Zehnerpotenzen bezüglich 9 auf.

$$\begin{array}{ccccccc}
10^0 & = & 1 & & & \equiv & 1 \pmod 9 \\
10^1 & = & 10 & & & \equiv & 1 \pmod 9 \\
10^2 & = & 10^1\cdot 10 & \equiv & 1\cdot 1 & \equiv & 1 \pmod 9 \\
10^3 & = & 10^2\cdot 10 & \equiv & 1\cdot 1 & \equiv & 1 \pmod 9 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Für eine 4-stellige Zahl mit den Ziffern a, b, c und d bedeutet dies zunächst

$$\begin{array}{ll}
a\cdot 10^3 \equiv a\cdot 1 \pmod 9 & \quad c\cdot 10^1 \equiv c\cdot 1 \pmod 9 \\
b\cdot 10^2 \equiv b\cdot 1 \pmod 9 & \quad d\cdot 10^0 \equiv d\cdot 1 \pmod 9
\end{array}$$

und weiter

$$\begin{array}{ll}
 & abcd_{10} \\
= & a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 10^1 + d\cdot 10^0 \\
\equiv & [\, a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 1 + d\cdot 1 \,] \pmod 9
\end{array}$$

und schließlich: Die Zahl $abcd_{10}$ und die Summe ihrer jeweils mit 1 multiplizierten Ziffern $a\cdot 1+b\cdot 1+c\cdot 1+d\cdot 1$ sind kongruent nach dem Modul 9. Da alle Zehnerpotenzen bezüglich 9 kongruent zu 1 sind, gilt diese Aussage auch für Zahlen mit mehr als vier Ziffern. Die Zahl $(a_n\, a_{n-1} \cdots a_1\, a_0)_{10}$ und die Summe $a_n\cdot 1+a_{n-1}\cdot 1+\cdots+a_1\cdot 1+a_0\cdot 1$ sind also immer kongruent nach dem Modul 9. Hieraus folgt die bekannte Teilbarkeitsregel für die Zahl 9: Eine Zahl ist genau dann durch 9 teilbar, wenn auch ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Eine ganz ähnliche Teilbarkeitsregel bekommt man auf dem gleichen Wege für die Zahl 11. Die Reste der Zehnerpotenzen sehen hier so aus:

$$\begin{array}{ccccccc}
10^0 & = & 1 & & & \equiv & 1 \pmod{11} \\
10^1 & = & 10 & & & \equiv & -1 \pmod{11} \\
10^2 & = & 10^1 \cdot 10 & \equiv & (-1)\cdot(-1) & \equiv & 1 \pmod{11} \\
10^3 & = & 10^2 \cdot 10 & \equiv & 1\cdot(-1) & \equiv & -1 \pmod{11} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Eine Zahl $(a_n \cdots a_3\, a_2\, a_1\, a_0)_{10}$ hat also die bezüglich 11 kongruente Summe $a_n \cdot (-1)^n + \cdots + a_3 \cdot (-1) + a_2 \cdot 1 + a_1 \cdot (-1) + a_0 \cdot 1$. Wegen der wechselnden Vorzeichen spricht man von der alternierenden Quersumme. Mithin gilt: Eine Zahl ist genau dann durch 11 teilbar, wenn auch ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Als nächstes entwickeln wir eine Teilbarkeitsregel für die Zahl 7. Die Reste der Zehnerpotenzen bezüglich 7 liefern uns wieder die Zahlen-

$$\begin{array}{cccccccl}
10^0 & = & 1 & & & \equiv & 1 \pmod 7 & r_0 = 1 \\
10^1 & = & 10 & & & \equiv & 3 \pmod 7 & r_1 = 3 \\
10^2 & = & 10^1 \cdot 10 & \equiv & 3\cdot 3 & \equiv & 2 \pmod 7 & r_2 = 2 \\
10^3 & = & 10^2 \cdot 10 & \equiv & 2\cdot 3 & \equiv & -1 \pmod 7 & r_3 = -1 \\
10^4 & = & 10^3 \cdot 10 & \equiv & (-1)\cdot 3 & \equiv & -3 \pmod 7 & r_4 = -3 \\
10^5 & = & 10^4 \cdot 10 & \equiv & (-3)\cdot 3 & \equiv & -2 \pmod 7 & r_5 = -2 \\
10^6 & = & 10^5 \cdot 10 & \equiv & (-2)\cdot 3 & \equiv & 1 \pmod 7 & r_n = r_{n-6}\ , n \in \mathbb{N}, n \geq 6 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

folge $r_0, r_1, r_2, \ldots$, mit der wir gliedweise die Ziffernfolge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ multiplizieren müssen, um die zur Zahl $(a_n\, a_{n-1} \cdots a_1\, a_0)_{10}$ kongruente Summe $a_n \cdot r_n + a_{n-1} \cdot r_{n-1} + \cdots + a_1 \cdot r_1 + a_0 \cdot r_0$ zu bekommen. In dieser Summe hat jede Ziffer a_i durch den Faktor r_i ihr eigenes "Gewicht". Man spricht daher von der gewichteten Quersumme zur Zahlenfolge $r_0, r_1, r_2, \ldots$. Hieraus ergibt sich folgende Teilbarkeitsregel für die Zahl 7: Eine Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn auch ihre gewichtete Quersumme zur Zahlenfolge $1, 3, 2, -1, -3, -2, \ldots$ durch 7 teilbar ist.

Als letztes Beispiel nehmen wir die Zahl 4 und erhalten folgende Liste.

$$\begin{array}{ccccccc}
10^0 & = & 1 & & & \equiv & 1 \pmod 4 \\
10^1 & = & 10 & & & \equiv & 2 \pmod 4 \\
10^2 & = & 10^1 \cdot 10 & \equiv & 2\cdot 2 & \equiv & 0 \pmod 4 \\
10^3 & = & 10^2 \cdot 10 & \equiv & 0\cdot 2 & \equiv & 0 \pmod 4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Die zur Zahl $(a_n\, a_{n-1} \cdots a_1\, a_0)_{10}$ kongruente gewichtete Quersumme benötigt also nur die beiden Summanden $a_1 \cdot 2$ und $a_0 \cdot 1$. Das ergibt folgende Teilbarkeitsregel für die Zahl 4: Eine Zahl ist genau dann durch 4 teilbar, wenn auch die Summe aus der letzten Ziffer und dem Doppelten der vorletzten Ziffer durch 4 teilbar ist.

Wenn wir aber die Liste der Zehnerpotenzen so schreiben

$$\begin{array}{lllllll}
10^0 & = & 1 & & & \equiv & 1 \pmod 4 \\
10^1 & = & 10 & & & \equiv & 10 \pmod 4 \\
10^2 & = & 10^1 \cdot 10 & \equiv & 2 \cdot 2 & \equiv & 0 \pmod 4 \\
10^3 & = & 10^2 \cdot 10 & \equiv & 0 \cdot 2 & \equiv & 0 \pmod 4 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

und mithin das Gewicht der vorletzten Ziffer verändern, dann hat die gewichtete Quersumme die Form $a_1 \cdot 10 + a_0 \cdot 1$, und wir bekommen die uns bekannte Teilbarkeitsregel für die Zahl 4: Eine Zahl ist genau dann durch 4 Teilbar, wenn auch die Zahl aus ihren letzten beiden Ziffern durch 4 teilbar ist.

4.4 Teilbarkeitsregeln in anderen Stellenwertsystemen

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob sich die Teilbarkeitsregeln auf andere Stellenwertsysteme übertragen lassen.

Wir beginnen mit der Quersummenregel für die Zahl 9. Dazu stellen wir hier noch einmal heraus, was denn eigentlich die Ursache für ihr Funktionieren im Zehnersystem darstellt.
Alles beruht auf der Kongruenz

$$10 \equiv 1 \pmod 9 .$$

Hieraus folgt nämlich

$$10^2 = 10 \cdot 10 \equiv 1 \cdot 10 = 10 \equiv 1 \pmod 9$$
$$10^3 = 10^2 \cdot 10 \equiv 1 \cdot 10 = 10 \equiv 1 \pmod 9$$
$$\vdots$$

und allgemein $10^n \equiv 1 \pmod 9$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Es folgt

$$\begin{aligned}
(a_n a_{n-1} \cdots a_1\, a_0)_{10} &= a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \\
&\equiv a_n \cdot 1 + a_{n-1} \cdot 1 + \cdots + a_1 \cdot 1 + a_0 \cdot 1 \\
&= a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \\
&= Q(a_n a_{n-1} \cdots a_1\, a_0) \pmod 9.
\end{aligned}$$