2. Platonische Körper

Dieses Kapitel legt den Schwerpunkt auf die Geometrie. Geometrie in der Grundschule befasst sich mit zwei zentralen Gebieten: Symmetrie und Raumvorstellung. Spiegelungen und Symmetrie werden einen Schwerpunkt im 2. Semester spielen. Dieses Kapitel wird sich mit der Raumgeometrie beschäftigen und zwar speziell mit den Platonischen und Archimedischen Körpern. Zur Vorbereitung betrachten wir zunächst regelmäßige Vielecke und deren Anwendung in regulären Parkettierungen.
Die Raumvorstellung gilt als eine der Faktoren der menschlichen Intelligenz. Ihre Ausbildung wird in der Grundschule stark gefördert, in der Sekundarstufe I reißt dieses Thema doch abrupt ab und wird nur am Rande in der Geometrie angesprochen, wenn Körper (Quader, Pyramide, Zylinder, u.a.) behandelt werden.

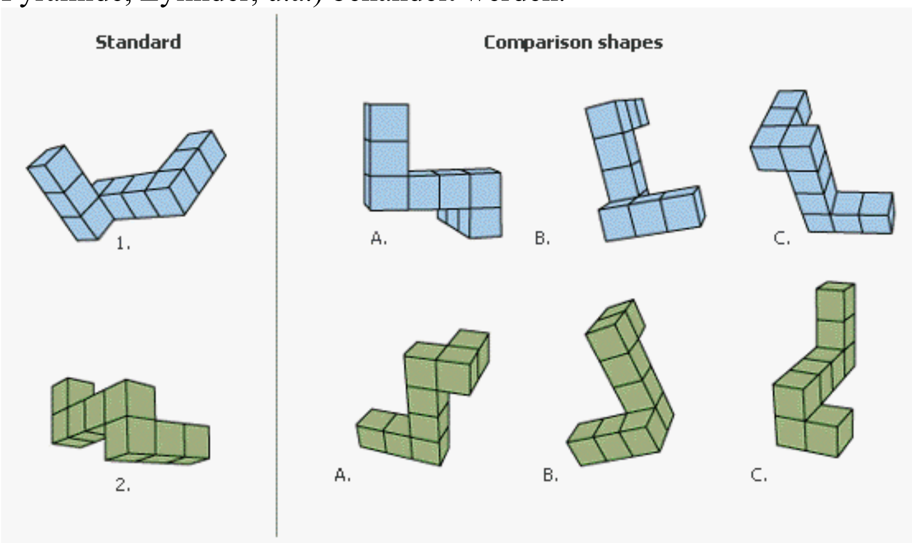


Abb. 1.1: Ein Test zur Fähigkeit, dreidimensionale Objekte im Geiste zu drehen. In jeder Reihe ist das Objekt auf der linken Seite identisch mit einem der Objekte auf der rechten Seite. Aber mit welchem?

2.1 Regelmäßige Vielecke

Definition 2.1 (Vieleck, Polygon)
Unter einem Vieleck oder Polygon verstehen wir eine ebene Figur, die aus $n \geq 3$ Ecken besteht. Die Ecken sind paarweise voneinander verschieden und drei angrenzende Eckpunkte dürfen nicht auf einer Geraden liegen.

Diese sehr allgemeine und deshalb auch unanschauliche Definition erlaubt Polygone, wie sie in Abb. 2.1 zu sehen sind.

Abb. 2.1: Polygone nach der allgemeinen Definition 2.1.

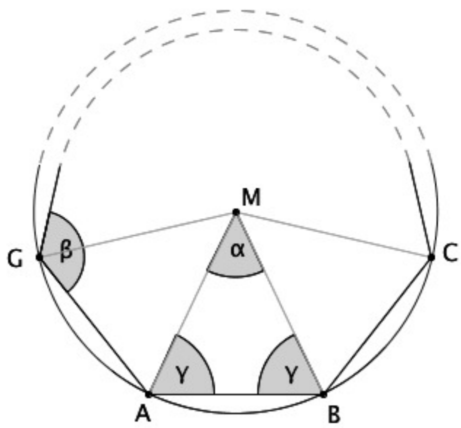
Wir werden uns im Folgenden einschränken und über Polygone sprechen, die sich beispielsweise nicht überschlagen (Abb. 2.1, rechts) und konvex sind (die beiden linken Figuren in Abb. 2.1). Von besonderem Interesse sind – schon wegen ihrer Ästhetik – die regelmäßigen Vielecke:

Definition 2.2 (Regelmäßiges Vieleck, reguläres Polygon)
Ein regelmäßiges Vieleck (reguläres Polygon) ist ein nicht überschlagenes, konvexes Polygon, das gleiche Seitenlängen und gleiche Winkel besitzt.

Bekannt sind mit Sicherheit das gleichseitige Dreieck und das regelmäßige Viereck, das Quadrat.

Abb. 2.2: Das Pentagon, das nach einem regelmäßigen Fünfeck angelegt ist.

Jedes regelmäßige Vieleck hat einen Umkreis, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt des Vielecks ist.
Von diesem Mittelpunkt kann man die Verbindungsstrecken zu den Eckpunkten ziehen und teilt so das regelmäßige *n*-Eck in *n* kongruente „Tortenstücke“. Dann ist aus Symmetriegründen der



Mittelpunktswinkel $\alpha = \frac{360°}{n}$. Die „Tortenstücke“ sind gleichschenklige Dreiecke (die Radien sind alle gleich lang), folglich sind die Basiswinkel γ gleich groß. In jedem dieser gleichschenkligen Dreiecke gilt: $\alpha + 2\gamma = 180°$ (*).
Letztlich interessiert uns der Innenwinkel β an einer Ecke. Offensichtlich ist aus Symmetriegründen $\beta = 2\gamma$, so dass wir die Gleichung (*) nicht nach γ auflösen, sondern nach $\beta = 2\gamma$ und erhalten: $\beta = 180° - \alpha = 180° - \frac{360°}{n}$.
Dieses Ergebnis kann man in verschiedene Darstellungen umformen:

$$\beta = 180° - \frac{360°}{n} = 180°\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 180°\frac{n-2}{n}$$

Rechts sind die Innenwinkel für einige, in den nachfolgenden Abschnitten häufig vorkommende regelmäßige Vielecke aufgelistet.

Ecken-zahl n	Innen-winkel β
3	60°
4	90°
5	108°
6	120°
8	135°
10	144°
12	150°
15	156°
18	160°

2.2 Parkettierung

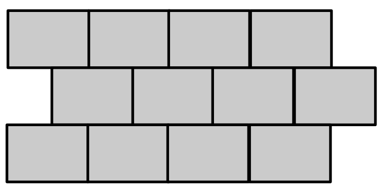
Eine Parkettierung, auch Kachelung oder Pflasterung genannt, der Ebene ist eine lückenlose und überlappungsfreie Überdeckung mit Teilflächen. Interessant werden Parkette, wenn an die Teilflächen einschränkende Bedingungen gestellt werden und an die Art, wie die Teilflächen zusammengefügt werden sollen.

2.2.1 Homogene Parkettierung

Von einer homogenen Parkettierung spricht man, wenn als Teilflächen Polygone (die nicht regelmäßig sein müssen) verwendet werden und beim Zusammenfügen folgende Bedingungen gelten:

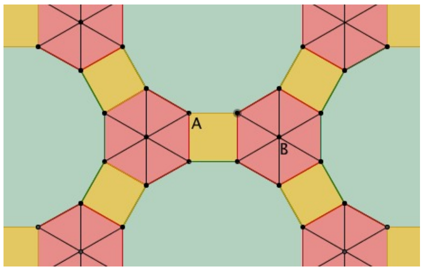
- Eckpunkte werden an Eckpunkte gelegt, also niemals ein Eckpunkt an einen inneren Punkt einer anderen Kante. Punkte, in denen die Eckpunkte der regelmäßigen Vielecke zusammenstoßen, heißen Knoten des Parketts.

Abb. 2.3 Eine Ziegelsteinmauer ist **kein** homogenes Parkett, da hier Eckpunkte von Teilflächen nicht auf Eckpunkte von Teilflächen treffen.



- Läuft man um einen Knoten herum (im oder gegen den Uhrzeigersinn), so erhält man immer die gleiche Abfolge von Vielecken. Für diese Eigenschaft wollen wir sagen, dass alle Knoten kongruent zueinander sind.

Abb. 2.4 Rechts ist ein **inhomogenes** Parkett dargestellt, da man um den Knoten A ein 3-, 3-, 4-, 12-Eck findet, um den Knoten B aber sechs Dreiecke.



Winkelbedingung an eine homogene Parkettierung
Da eine Parkettierung lückenlos und ohne Überlappungen sein soll, müssen die Winkel der Teilflächen, die in einem Knoten zusammenstoßen, genau 360° ergeben.

2.2.1.1 Platonische Parkettierung

Ein homogenes Parkett heißt platonische Parkettierung, wenn
- die Teilflächen regelmäßige Vielecke sind und
- alle Teilflächen zueinander kongruent sind

Wegen der Winkelbedingung kann man für eine platonische Parkettierung nur regelmäßige Vielecke nehmen, deren Innenwinkel β ein Teiler von 360° ist. Ein Blick in die obige Tabelle für die Innenwinkel zeigt, dass das für Drei-, Vier- und Sechsecke der Fall ist. Die Systematik der Tabelle legt auch nahe, dass andere regelmäßige Vielecke für eine platonische Parkettierung nicht in Frage kommen können.

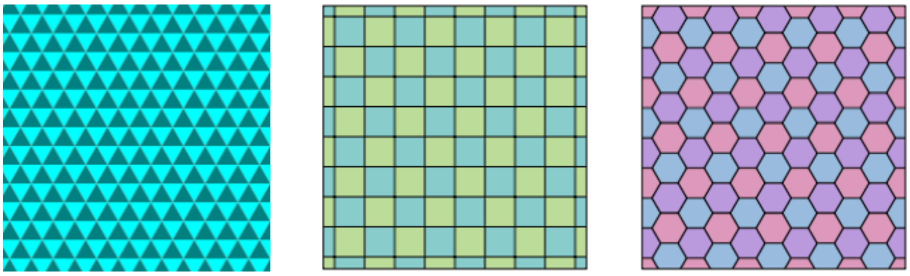


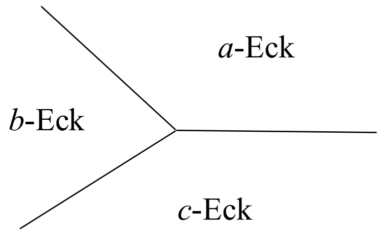
Abb. 2.5 Die drei Möglichkeiten für ein platonisches Parkett

2.2.1.2 Archimedische Parkettierung

Für ein archimedisches Parkett gibt man die Forderung auf, dass alle regelmäßigen Vielecke kongruent zueinander sein müssen. Man darf also verschiedene regelmäßige Vielecke mischen, muss dabei aber die anderen Regelmäßigkeitsforderungen an ein homogenes Parkett beachten.
Um alle Kombinationsmöglichkeiten zu erhalten, gehen wir sie systematisch durch nach der Anzahl der Teilflächen, die in einem Knoten zusammenstoßen:

1. In einem Knoten stoßen drei regelmäßige Vielecke zusammen

Mit den unbekannten Eckenzahlen können wir für die Winkelbedingung einen Ansatz machen:



Winkel des a-Ecks + Winkel des b-Ecks + Winkel des c-Ecks = 360°

$$180°\left(1-\frac{2}{a}\right)+180°\left(1-\frac{2}{b}\right)+180°\left(1-\frac{2}{c}\right)=360° \quad | \ :180°$$

$$\left(1-\frac{2}{a}\right)+\left(1-\frac{2}{b}\right)+\left(1-\frac{2}{c}\right)=2 \quad | \ \text{-3}$$

$$-\frac{2}{a}-\frac{2}{b}-\frac{2}{c}=-1 \quad | \ :(-2)$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$$

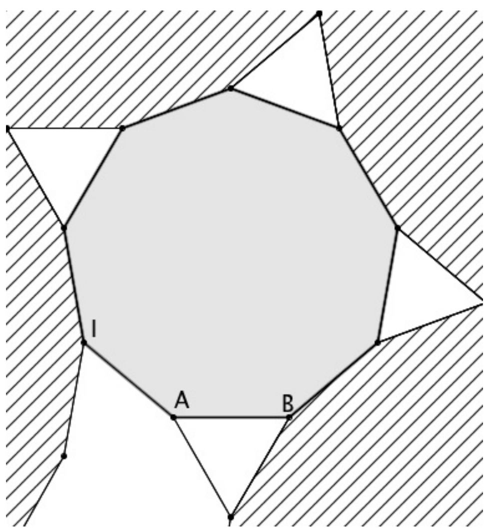
Die erhaltene Gleichung muss gelöst werden, wobei a, b und c natürliche Zahlen sein müssen. Durch systematisches Probieren und Teilbarkeitsüberlegungen kommt man auf folgende Lösungen a, b, c:

3, 7, 42 3, 8, 24 3, 9, 18 3, 10, 15 3, 12, 12
4, 5, 20 4, 6, 12 4, 8, 8
5, 5, 10
6, 6, 6

Die letzte Lösung ist ein platonisches Parkett und jedes platonische Parkett ist ein archimedisches. Wir suchen hier die neuen Parkette.

Die oben aufgeführten Eckenzahlen erfüllen zwar die Winkelbedingung an einem Knoten (lokale Lösung), müssen jedoch keine Lösung für ein Parkett (globale Lösung) sein. Nach folgender Überlegung fallen mehrere der oben angegebenen lokalen Lösungen aus:

Hat eines der Vielecke (V1) der lokalen Lösung eine ungerade Eckenzahl und haben die anderen beiden Vielecke eine ungleiche Eckenzahl, so muss man um V1 die anderen beiden in „bunter Reihe" legen.



Wir wollen das am Beispiel 3, 9, 18 betrachten. Als erstes Vieleck V1 wählen wir das 9-Eck. Beginnen wir an der Kante $\overline{AB}$ mit einem Dreieck, so muss an die nächste Kante (gegen den Uhrzeigersinn) ein 18-Eck (schraffiert) gelegt

werden, damit im Punkt B die lokale Lösung 3, 9, 18 hergestellt wird. So muss man immer abwechselnd Dreieck und 18-Eck legen. Im Punkt I ist damit gefordert, an die Kante $\overline{IA}$ ein Dreieck zu legen. Damit wird aber unvermeidbar in A die Vieleckfolge 3, 9, 3 angelegt, was die Regelmäßigkeit zerstört.
Diese Unregelmäßigkeit tritt immer dann auf, wenn eines der drei Vielecke eine ungerade Eckenzahl hat und die anderen beiden Vielecke eine ungleiche Eckenzahl haben. Damit fallen in den oben gefundenen lokalen Lösungen für den Fall, dass drei regelmäßige Vielecke in einem Knoten zusammentreffen, folgende weg:
3, 7, 42   3, 8, 24   3, 9, 18   3, 10, 15,   4, 5, 20   5, 5, 10
Übrig bleiben die Lösungen
3, 12, 12   4, 6, 12   4, 8, 8

2. In einem Knoten stoßen vier regelmäßige Vielecke zusammen
(in Arbeit)

3. In einem Knoten stoßen fünf regelmäßige Vielecke zusammen
(in Arbeit)

4. In einem Knoten stoßen sechs regelmäßige Vielecke zusammen
(in Arbeit)