1.2 Der goldene Schnitt

Beim Begriff „Goldener Schnitt“ denken viele Menschen an Kunst oder künstlerische Gestaltung. Das künstlerische Problem ist, wie ein Bild wohlproportioniert einzuteilen ist. An welche Stelle positioniert man den „Blickfang“ auf einem Foto, wie bemisst man bei einem Rechteck Länge und Breite für eine schöne Form? Auf solche Fragen hört man z.T. die Antwort „Im goldenen Schnitt“. Praktisch bedeutet das aber nur ein ungefähres Verhältnis. Die gröbste, aber wesentliche Information ist „nicht in der Mitte“. In Anleitungen zum Fotografieren wird der „goldene Schnitt“ in eine „Drittelregel“ übersetzt, also eine Einteilung ein Drittel zu zwei Drittel. Etwas aufwändiger, aber praktisch recht einfach zu realisieren ist eine Einteilung in Achtel, wobei man dann ganz im Sinne der Grundregel „nicht die Mitte“ eine Einteilung von fünf Achtel zu drei Achtel wählt.

1.2.1 Definition des goldenen Schnitts

Keine der oben genannten Einteilungsregeln trifft den goldenen Schnitt genau. Dieser ist eine sehr theoretische Konstruktion mit einer exakten, mathematischen Definition, die in der Praxis nicht so einfach zu realisieren ist wie die oben beschriebenen Näherungen.

Definition
Wenn eine Strecke durch einen Punkt so geteilt wird, dass das Verhältnis von größerem Teil zur ganzen Strecke das gleiche ist wie das von kleinerem Teil zum größeren Teil, so sagt man: Der Punkt teilt die Strecke im Goldenen Schnitt.

Der größere Teil wird Major, der kleinere Teil Minor genannt.[2]
Mit diesen Begriffen lässt sich die Definition übersichtlicher schreiben: $\frac{\text{Major}}{\text{Gesamtstrecke}} = \frac{\text{Minor}}{\text{Major}}$
Diese Definition ermöglicht es, das Teilverhältnis zu berechnen. Setzen wir die Gesamtlänge zu 1 und nennen wir die Länge des Majors x, so hat der Minor die Länge $1 - x$.

Damit lautet die Verhältnisgleichung: $\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$

Diese Gleichung lässt sich nach x auflösen.
$x^2 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0$
Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

[2] *maior (lat) - der größere; minor (lat) - der kleinere*

$$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ oder } x=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

Die zweite Lösung ist offensichtlich negativ und damit keine Lösung des geometrischen Problems, in dem alle Längen positiv sind.
Also gilt bei einem goldenen Schnitt für das Verhältnis

$$\frac{\text{Major}}{\text{Gesamtstrecke}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Diese Zahl wird üblicherweise mit φ bezeichnet und es gilt:

$$\text{Goldener Schnitt: } \varphi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}618$$

Die definierende Gleichung ist $\varphi^2=1-\varphi$

1.2.2 Geometrische Konstruktion des goldenen Schnitts

Die rechnerische Bestimmung des goldenen Schnitts ermöglicht nun eine konstruktive Bestimmung, da in der Rechnung nur die Grundrechenarten und die Quadratwurzel vorkommen.

Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ mit der Länge *a*.

Gesucht ist der Teilungspunkt T, der $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt.

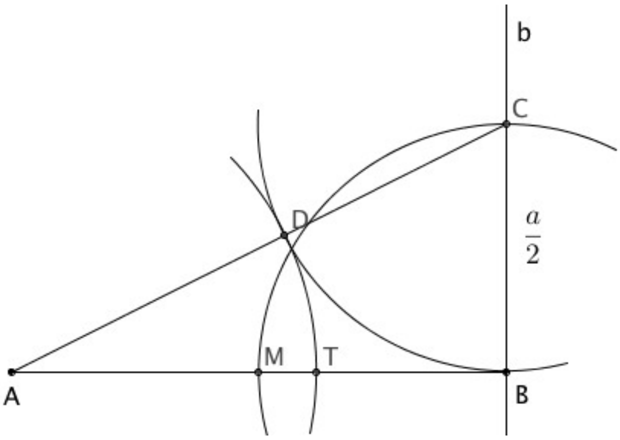


Abb. 1.1 Die klassische Konstruktion des goldenen Schnitts.

Zur Strecke $\overline{AB}$ wird in B die Senkrechte b konstruiert und der Mittelpunkt M. Der Kreis um B mit dem Radius |BM| schneidet b in C. Die Strecke $\overline{BC}$ hat folglich die Länge $\frac{a}{2}$. Um C wird ein Kreis mit dem Radius |CB| gezeichnet, der die Strecke $\overline{AC}$ im Punkt D schneidet. Um A wird ein Kreis mit dem Radius |AD| gezeichnet, der die Strecke $\overline{AB}$ im Punkt T schneidet. T ist der gesuchte Teilungspunkt, $\overline{AT}$ hat die Länge φa.

Begründung der Konstruktion

Nach den ersten Konstruktionsschritten ist das Dreieck ABC rechtwinklig mit dem rechten Winkel bei B. Die beiden Katheten haben die Längen $\left|\mathrm{AB}\right| = a = 2 \cdot \frac{a}{2}$ und $\left|\mathrm{BC}\right| = \frac{a}{2}$. Dann ist die Strecke $\overline{\mathrm{AC}}$ die Hypotenuse, die nach dem Satz von Pythagoras die Länge hat:

$$\left|\mathrm{AC}\right| = \sqrt{\left|\mathrm{AB}\right|^2 + \left|\mathrm{BC}\right|^2} = \sqrt{\left(2 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{4+1} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Durch den Kreis um C mit dem Radius $\frac{a}{2}$ wird von |AC| diese Länge subtrahiert.

Somit hat die Strecke $\overline{\mathrm{AD}}$ die Länge $\left|\mathrm{AD}\right| = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2} = a\varphi$.

Diese angestrebte Länge wird durch den Kreis um A mit dem Radius |AD| lediglich von der Strecke $\overline{\mathrm{AC}}$ übertragen auf die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$.

1.2.3 Die Goldene Verlängerung

In einigen geometrischen Problemen spielt das Umkehrproblem zum Goldenen Schnitt eine Rolle: Gegeben ist die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$. Gesucht ist die Strecke $\overline{\mathrm{AC}}$ (als Gesamtstrecke), so dass $\overline{\mathrm{AB}}$ der Major zu $\overline{\mathrm{AC}}$ ist. Auch hier schauen wir uns zuerst die rechnerische Lösung an.
Die Bedingung lautet formalisiert $\left|\mathrm{AB}\right| = \varphi\left|\mathrm{AC}\right|$.

Aufgelöst nach der gesuchten Streckenlänge erhält man $\left|\mathrm{AC}\right| = \frac{1}{\varphi}\left|\mathrm{AB}\right|$.

Da φ bekannt ist, ist $\frac{1}{\varphi}$ berechenbar.

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Diese neue Zahl wird üblicherweise mit Φ bezeichnet und es gilt:

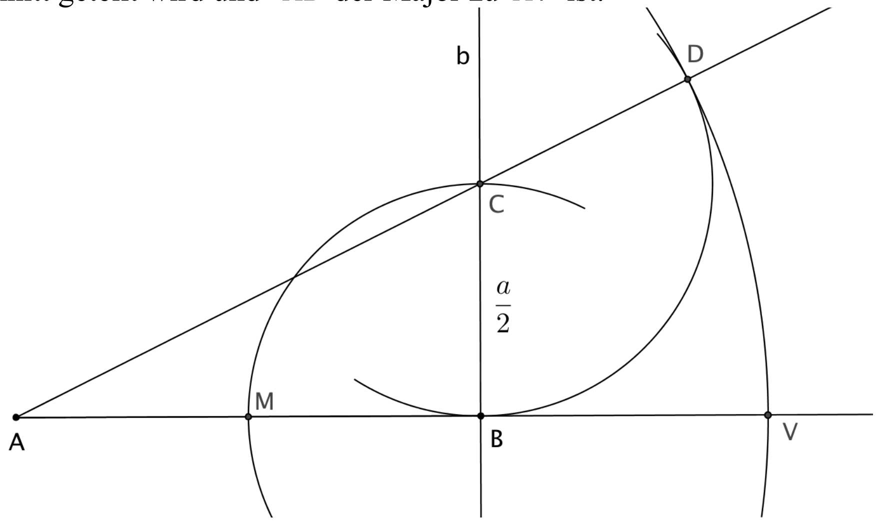
$$\Phi = \frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$$

Da diese Zahl größer als 1 ist und damit eine Streckenverlängerung bewirkt, wollen wir Φ Goldene Verlängerung nennen.

> Goldene Verlängerung: $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$
>
> Die definierende Gleichung ist $\Phi^2 = 1 + \Phi$

Ganz analog zum Goldenen Schnitt kann man die Goldene Verlängerung einer gegebenen Strecke ebenfalls geometrisch konstruieren. Gegeben ist die Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ mit der Länge *a*.

Gesucht ist der Punkt V, so dass die Strecke $\overline{AV}$ durch B im goldenen Schnitt geteilt wird und $\overline{AB}$ der Major zu $\overline{AV}$ ist.

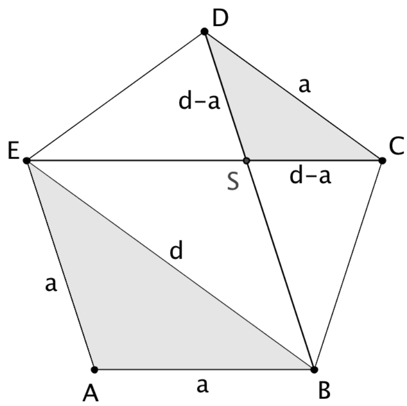


Die Konstruktion ist ähnlich zur Konstruktion des goldenen Schnitts. Man zeichnet in B die Senkrechte b zu $\overline{AB}$ und konstruiert den Mittelpunkt M zu $\overline{AB}$. Der Kreis um B mit dem Radius |BM| schneidet b in C. Die Strecke $\overline{BC}$ hat folglich die Länge $\frac{a}{2}$. Um C wird ein Kreis mit dem Radius |CB| gezeichnet, der den Strahl $\overline{AC}$ im Punkt D schneidet. Die Strecke $\overline{AD}$ hat bereits die gesuchte Länge, mit einem Kreis um A wird sieübertragen auf die Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus. $\overline{AV}$ ist dann die gesuchte goldene Verlängerung zu $\overline{AB}$.

1.2.4 Anwendungen des goldenen Schnitts und der goldenen Verlängerung

Der goldene Schnitt kommt exakt in einigen regelmäßigen Figuren vor. Die einfachste ist das regelmäßige Fünfeck.

Satz
Im Fünfeck schneiden sich zwei Diagonalen im goldenen Schnitt.
D.h. für die nebenstehende Abbildung: S teilt die Strecke $\overline{EC}$ (und auch $\overline{BD}$) im goldenen Schnitt.



Beweis
Aus Symmetriegründen sind die Diagonale $\overline{EC}$ und die gegenüber-

liegende Seite $\overline{AB}$ zueinander parallel, ebenso $\overline{BD}$ und $\overline{AE}$. Folglich ist das Viereck ABSE ein Parallelogramm (sogar eine Raute). Damit gilt für die Streckenlängen $|ES| = a$, $|EC| = d$, $|SC| = d - a$.

Auf Grund der Parallelität sind die beiden Dreiecke ABE und SCD ähnlich. Folglich gilt die Verhältnisgleichung $\frac{a}{d} = \frac{d-a}{a}$. Wir formen diese Gleichung ein wenig um.

$$\frac{a}{d} = \frac{d-a}{a} = \frac{d}{a} - 1 \quad | \cdot \frac{a}{d}$$

$$\left(\frac{a}{d}\right)^2 = 1 - \frac{a}{d}$$

Nun führen wir zur Abkürzung ein $\frac{a}{d} = x$ und erhalten als Gleichung

$x^2 = 1 - x$. Das war aber im Abschnitt 1.1.1 die quadratische Gleichung, die den goldenen Schnitt φ als (positive) Lösung hatte.

Also erhalten wir $\frac{a}{d} = \varphi \Rightarrow a = \varphi d$. Letzteres besagt, dass die Diagonallänge *d* durch den Abschnitt *a* gerade im Goldenen Schnitt zerteilt wird.

$|ES| = a = \varphi d = \varphi |EC|$, was gezeigt werden sollte. □

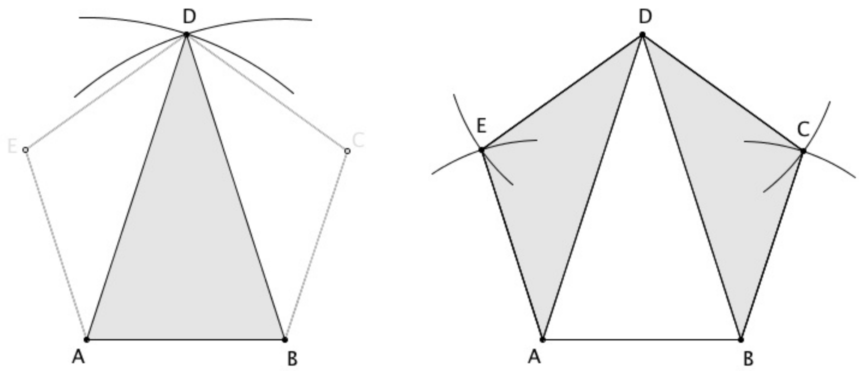
Dieser Zusammenhang versetzt uns in die Lage, das klassische Problem zu lösen:

Konstruiere (mit Zirkel und Lineal) zur vorgegebenen Kantenlänge *a* das regelmäßige Fünfeck.

Wegen $a = \varphi d$ erhalten wir umgekehrt $d = \frac{1}{\varphi} a = \Phi a$. Die für die Konstruktion notwendige Diagonallänge *d* erhalten wir aus der vorgegebenen Kantenlänge *a* durch Goldene Verlängerung.

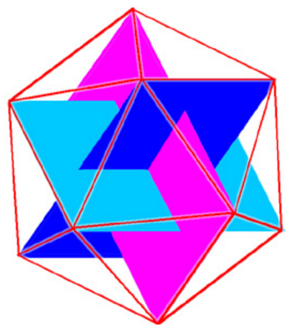
Mit der klassischen Konstruktion (Abschnitt 1.1.3) können wir zu $a = |AB|$ mit Zirkel und Lineal die Diagonallänge $d = |AD|$ konstruieren.

Dann zerlegen wir das regelmäßige Fünfeck in drei Teildreiecke, die wir schrittweise konstruieren können.

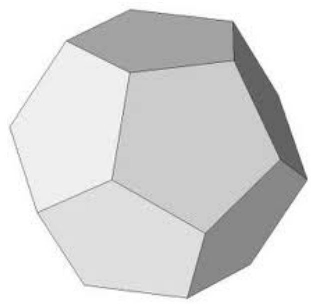


Zunächst wird das Teildreieck ABD aus den Seitenlängen $\left|\mathrm{AB}\right| = a$, $\left|\mathrm{BD}\right| = d$ und $\left|\mathrm{AD}\right| = d$ konstruiert. Dann kann man zu beiden Seiten mit Kreisbögen mit dem Radius a um A, B und D die Punkte C und E konstruieren.

Mit z.T. aufwändigeren Betrachtungen und Rechnungen kann man zeigen, dass der Goldene Schnitt auch im Ikosaeder vorkommt. Hier bilden jeweils vier gegenüber liegende Punkte ein sog. Goldenes Rechteck, da die Seitenlängen im Verhältnis des Goldenen Schnitts stehen.



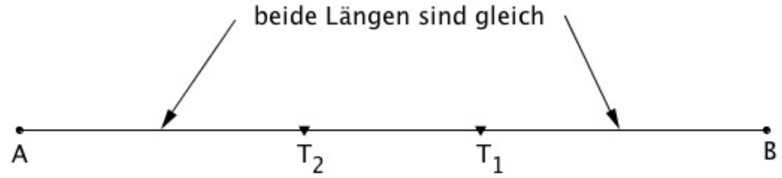
Ebenso kann man den Goldenen Schnitt im Dodekaeder finden.



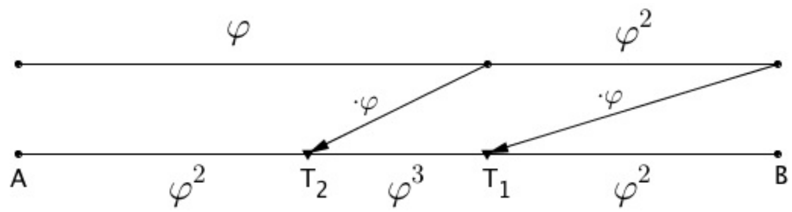
1.2.5 Rechnen mit dem Goldenen Schnitt

1.2.5.1 Die stetige Teilung

Für den goldenen Schnitt als Zahl $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$ gilt die wesentliche, definierende Gleichung $\varphi^2 = 1 - \varphi$. Wir haben oben gesehen, dass man durch die Multiplikation mit φ zu einer Streckenlänge die Länge des Majors bekommt. Folglich bedeutet dann eine Multiplikation mit φ^2, dass man zum Major durch einen weiteren goldenen Schnitt wiederum den Major bestimmt. Die definierende Gleichung $\varphi^2 = 1 - \varphi$ besagt nun, dass diese Länge mit der Länge des ersten Minors übereinstimmt.



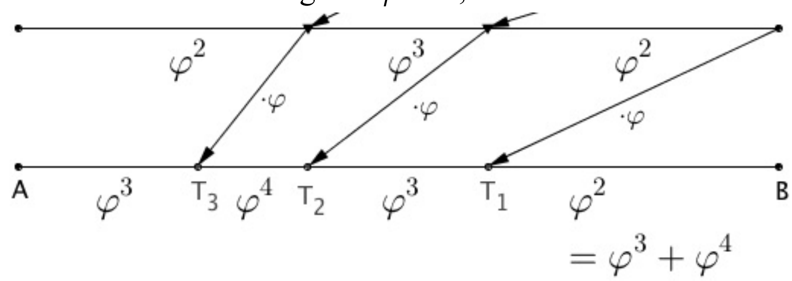
T_1 teilt die Strecke $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt.
$\overline{AT_1}$ ist der Major mit der Länge $|AT_1| = \varphi |AB|$ und
$\overline{T_1B}$ ist der Minor mit der Länge .
Nun teilt T_2 die Strecke $\overline{AT_1}$ wieder im Goldenen Schnitt.
Somit ist $|AT_2| = \varphi |AT_1| = \varphi^2 |AB|$. Wegen der definierenden Gleichung für den Goldenen Schnitt, $\varphi^2 = 1 - \varphi$, gilt dann
$|AT_2| = \varphi^2 |AB| = (1-\varphi)|AB| = |T_1B|$.



Die Teilung im Goldenen Schnitt kann man auch auffassen als eine Stauchung der Strecke mit dem Faktor φ. Der Endpunkt B wird dabei auf den Teilungspunkt T_1 abgebildet. T_1 teilt die Strecke in den Major der Länge φ und den Minor der Länge $\varphi^2 = 1 - \varphi$. Bei einer erneuten Teilung des Majors $\overline{AT_1}$ im Goldenen Schnitt entsteht der Teilungspunkt T_2. Die Strecke $\overline{T_1B}$, der Minor der ersten Teilung, wird dann verkürzt auf φ^3.
Diese zweite Einteilung liefert unmittelbar die Gleichung $2\varphi^2 + \varphi^3 = 1$.
Beweis mit der Voraussetzung $\varphi^2 = 1 - \varphi$:

$$2\varphi^2 + \varphi^3 = \varphi^2(2+\varphi) = (1-\varphi)(2+\varphi) = 2 - \varphi - \varphi^2 = 2 - \varphi - (1-\varphi) = 1$$

Setzt man die Stauchung mit φ fort, erhält man



Auch hier lässt sich sofort ablesen: $2\varphi^3 + \varphi^4 + \varphi^2 = 1$

An der Strecke $\overline{AT_2}$ kann man erkennen $\varphi^2=\varphi^3+\varphi^4$. Setzt man das ein, um einen Zusammenhang zu erhalten, der nur die Potenzen φ^3 und φ^4 enthält, so erhält man $3\varphi^3+2\varphi^4=1$.
Beweis mit der Voraussetzung $\varphi^2=1-\varphi$:

$$3\varphi^3+2\varphi^4=\varphi^2\left(3\varphi+2\varphi^2\right)=\left(1-\varphi\right)\left(3\varphi+2\left(1-\varphi\right)\right)=\left(1-\varphi\right)\left(\varphi+2\right)$$
$$=\varphi+2-\varphi^2-2\varphi=-\varphi+2-\left(1-\varphi\right)=1$$

Hinweis mit Bezug auf das nächste Kapitel:
In den Summen $2\varphi^2+\varphi^3=1$ und $3\varphi^3+2\varphi^4=1$ tauchen auf der rechten Seite die Fibonacci-Zahlen auf.

1.2.5.2 Potenzen von φ und ϕ

Eine weitere Rechnung ergibt sich ohne geometrische Veranschaulichung bei der Frage nach einfacheren Termen für die Potenzen von φ. Der erste Schritt ist in der definierenden Gleichung für den goldenen Schnitt gegeben: $\varphi^2=1-\varphi$. Hier wird die zweite Potenz von φ durch einen linearen Term von φ ausgedrückt.

$$\varphi^3=\varphi^2\cdot\varphi=\left(1-\varphi\right)\varphi=\varphi-\varphi^2=\varphi-\left(1-\varphi\right)=2\varphi-1$$
$$\varphi^4=\varphi^3\cdot\varphi=\left(2\varphi-1\right)\varphi=2\varphi^2-\varphi=2\left(1-\varphi\right)-\varphi=2-3\varphi$$
$$\varphi^5=\varphi^4\cdot\varphi=\left(2-3\varphi\right)\varphi=2\varphi-3\varphi^2=2\varphi-3\left(1-\varphi\right)=5\varphi-3$$

Anmerkung ohne Beweis:
In den linearen Termen tauchen die Fibonacci-Zahlen auf. Für eine allgemeine Gesetzmäßigkeit formen wir die Ergebnisse noch ein wenig um.

$$\varphi^2=-\left(\varphi-1\right)$$
$$\varphi^3=+\left(2\varphi-1\right)$$
$$\varphi^4=-\left(3\varphi-2\right)$$
$$\varphi^5=+\left(5\varphi-3\right)$$

Hier kann man nun die Gesetzmäßigkeit
$\varphi^n=\left(-1\right)^{n+1}\left(f_n\varphi-f_{n-1}\right)$ erkennen.

Ganz analog kann man die Potenzen der Goldenen Verlängerung Φ linearisieren. Hier ist die definierende Gleichung $\Phi^2=\Phi+1$.

$$\Phi^3=\Phi^2\cdot\Phi=\left(\Phi+1\right)\Phi=\Phi^2+\Phi=\left(\Phi+1\right)+\Phi=2\Phi+1$$
$$\Phi^4=\Phi^3\cdot\Phi=\left(2\Phi+1\right)\Phi=2\Phi^2+\Phi=2\left(\Phi+1\right)+\Phi=3\Phi+2$$
$$\Phi^5=\Phi^4\cdot\Phi=\left(3\Phi+2\right)\Phi=3\Phi^2+2\Phi=3\left(\Phi+1\right)+2\Phi=5\Phi+3$$

Auch hier tauchen in den Ergebnissen die Fibonacci-Zahlen auf.

1.2.6 Der goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen

„An der Mathematik irritiert mich, dass der goldene Schnitt und die Fibonacci-Zahlen sich zueinander so verhalten, als sei der ganze Kosmos schlampig gearbeitet.“
(JaMiRi, Karikatur-Zeichner der Deutschen Mathematiker Vereinigung)

Die vorangegangenen Betrachtungen haben schon an mehreren Stellen aufgezeigt, dass die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt miteinander in Beziehung stehen. Hier wollen wir den aussagekräftigsten Zusammenhang betrachten.
Bildet man in der Folge der Fibonacci-Zahlen jeweils den Quotienten mit der vorhergehenden Zahl (genauer $\frac{f_n}{f_{n-1}}$), so stellt man fest, dass dieser Quotient offensichtlich einen Grenzwert besitzt. Zudem scheint dieser Grenzwert gerade die Goldene Verlängerung $\Phi \approx 1{,}618$ zu sein.
Wir wollen hier nicht beweisen, dass der Quotient von aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen existiert. Wir können aber zeigen, dass dieser Grenzwert die Goldene Verlängerung Φ ist.

Index	Fib.-Zahl	Quotient
1	1	
2	1	1,00000000
3	2	2,00000000
4	3	1,50000000
5	5	1,66666667
6	8	1,60000000
7	13	1,62500000
8	21	1,61538462
9	34	1,61904762
10	55	1,61764706
11	89	1,61818182
12	144	1,61797753
13	233	1,61805556
14	377	1,61802575
15	610	1,61803714
16	987	1,61803279
17	1597	1,61803445
18	2584	1,61803381
19	4181	1,61803406
20	6765	1,61803396

Nennen wir den gesuchten Grenzwert x, also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = x$.

Wir nehmen die Definitionsgleichung für die Fibonacci-Zahlen und formen sie um.

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \Big|:f_n \quad \Rightarrow \quad \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$$

Im letzten Bruch wird die vorhergehende Fibonacci-Zahl durch die nachfolgende dividiert, was für unsere Grenzwertbetrachtung gerade falsch herum ist. Daher bilden wir dort den Kehrwert des Kehrwerts.

$\frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}$ Wenn nun der besagte Grenzwert existiert, so gilt

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}} \right) = 1 + \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}}$. In beiden Fällen wird der gleiche Grenzwert betrachtet, nämlich der des Quotienten aus einer Fibonacci-Zahl und ihrer vorhergehenden. Diesen Grenzwert hatten wir anfänglich x genannt, also gilt $x = 1 + \frac{1}{x}$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit x, erhalten wir $x^2 = x + 1$. Diese Gleichung hat, wie wir oben in Abschnitt 1.2.3 gesehen haben, die Goldene Verlängerung Φ als positive Lösung.

Die Quotienten von aufeinander folgenden Fibonacci-Zahlen konvergieren gegen die Goldene Verlängerung Φ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi \approx 1{,}618$$

Die Näherungsformel für die Fibonacci-Zahlen (Abschnitt 1.1.3) macht letztlich von dieser Eigenschaft gebrauch.