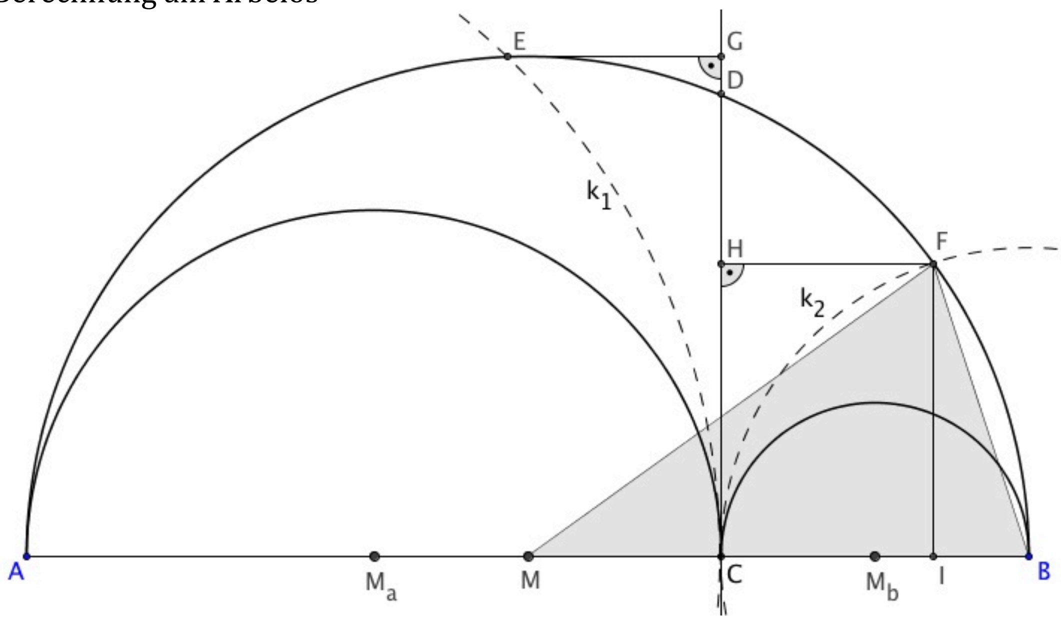
Dr. Reimund Albers Sommersemester 2014

Mathematisches Denken und Lehren 2

9. Übung
Arbelos, Inkreis

Präsenzübungen für Do, 3.7.

1. Berechnung am Arbelos



In einen Arbelos zeichnet man um A mit dem Radius $|AC|$ den Kreis k_1 und um B mit dem Radius $|BC|$ den Kreis k_2. Die Schnittpunkte mit dem „Außenkreis“ sind E und F. CD ist wie üblich die Senkrechte zur Basislinie durch C. Von E und F fällt man das Lot auf CD, die Fußpunkte sind G und H.

a. Berechnen Sie die Länge des Lots $\overline{HF}$.

Anleitung: Nennen Sie die gesuchte Länge s und die Länge des Lots von F auf die Basislinie h (Fußpunkt I). Schreiben Sie dann den Satz des Pythagoras auf für die beiden rechtwinkligen Dreiecke MIF und IBF.

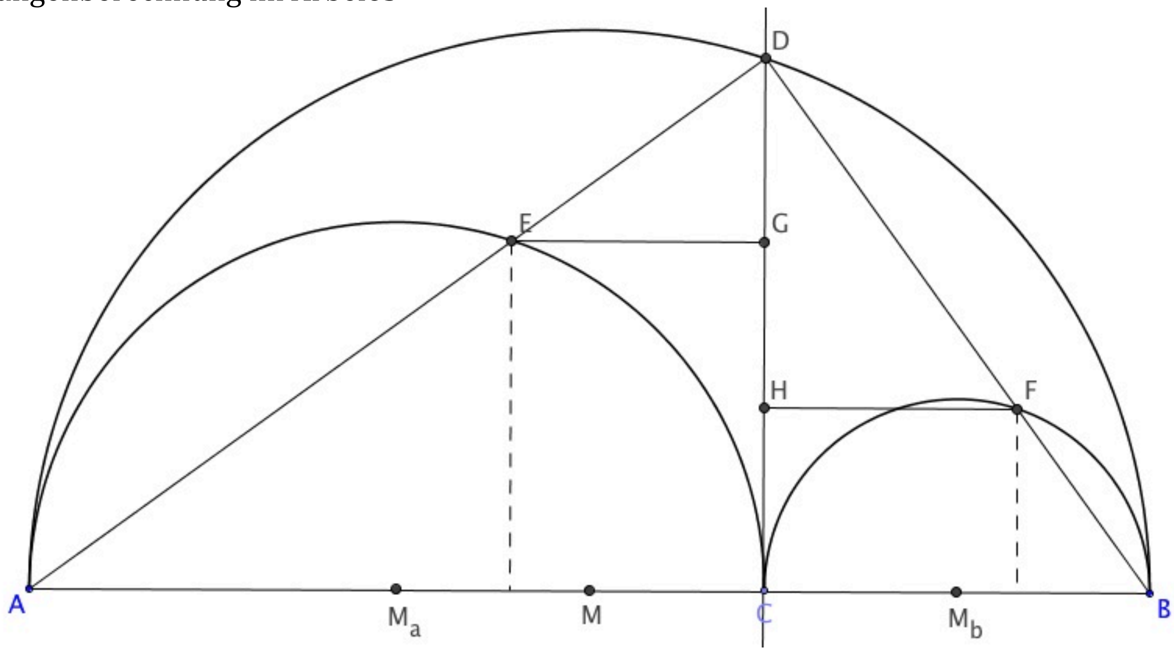
Ergebnis: $|HF| = s = \dfrac{2ab}{a+b}$

b. Warum ist der Ansatz $|MI| \cdot |IB| = |IF|^2$ (nach dem Höhensatz) falsch?

c. Argumentieren Sie, dass $|EG| = |HF|$ gilt.

Hausübungen (Abgabe: Fr, 4.7.)

2. Längenberechnung im Arbelos



Im Arbelos werden auf die bekannte Weise die Punkte E und F konstruiert. Von beiden Punkten fällt man das Lot auf die Strecke $\overline{CD}$. Ihre Fußpunkte sind G bzw. H.

a. Berechnen Sie die Längen der Strecken $\overline{EG}$ und $\overline{FH}$. (Ergebnis: In beiden Fällen ist die Länge $\frac{2ab}{a+b}$)

Es gibt sehr viele Wege, diese Aufgabe zu lösen. Der eleganteste Weg geht über die Betrachtung, dass die Dreiecke ACE und CBF jeweils verkleinerte Bilder des Dreiecks ABD sind. Skalierungsfaktor ermitteln!

b. Das Ergebnis in a ist gerade das Doppelte des Radius der Archimedischen Zwillinge. Konstruieren Sie, ausgehend von der obigen Abbildung, die Archimedischen Zwillinge und beschreiben sie die Konstruktionsschritte (*ähnlich wie in Aufgabe 4 vorgemacht*).

3. Termumformung

Es beginnt mit zwei Gleichungen

$2ar = 2bs + 4ab - 2br - 2ar$ und $2ar - 2as = 2br + 2bs$ (1)

$4ar + 2br - 4ab = 2bs$ und $2ar - 2br = 2as + 2bs$ (2)

$2ar + br - 2ab = bs$ und $(a-b)r = (a+b)s$ (3)

$(2ar + br - 2ab)(a+b) = b(a+b)s$ und $b(a-b)r = b(a+b)s$ (4)

Nun werden die Gleichungen kombiniert.

$$(2ar + br - 2ab)(a+b) = b(a-b)r \quad (5)$$

$$2a^2r + abr - 2a^2b + 2abr + b^2r - 2ab^2 = abr - b^2r \quad (6)$$

$$2a^2r + 2abr + 2b^2r = 2a^2b + 2ab^2 \quad (7)$$

$$r(a^2 + ab + b^2) = ab(a+b) \quad (8)$$

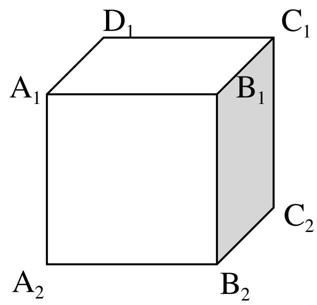
$$r = \frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2} \quad (9)$$

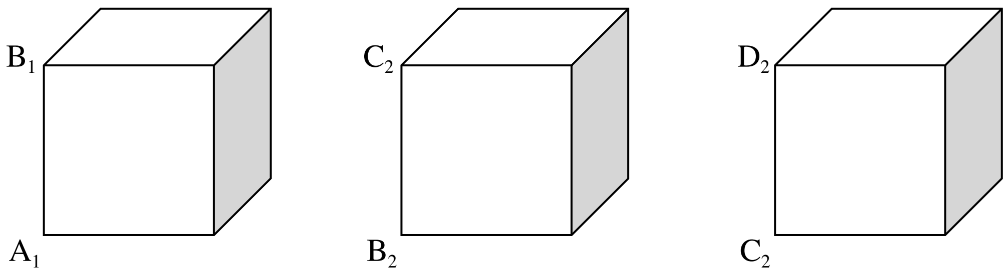
Erläutern Sie die Schritte der Termumformung.

4. Zeichenaufgabe
   Führen Sie auf dem Arbeitsblatt die dort aufgeführte Konstruktionsbeschreibung aus. (Es ist die Konstruktion des Inkreises auf der Basis der Inversion am Kreis.)
   Senkrechte und Mittelpunkte zeichnen Sie bitte (zeitsparend und übersichtlich) mit dem Geodreieck.
   Sie können die Konstruktion auch mit GeoGebra machen. Fügen Sie dann einen Ausdruck Ihrer Hausübung bei.

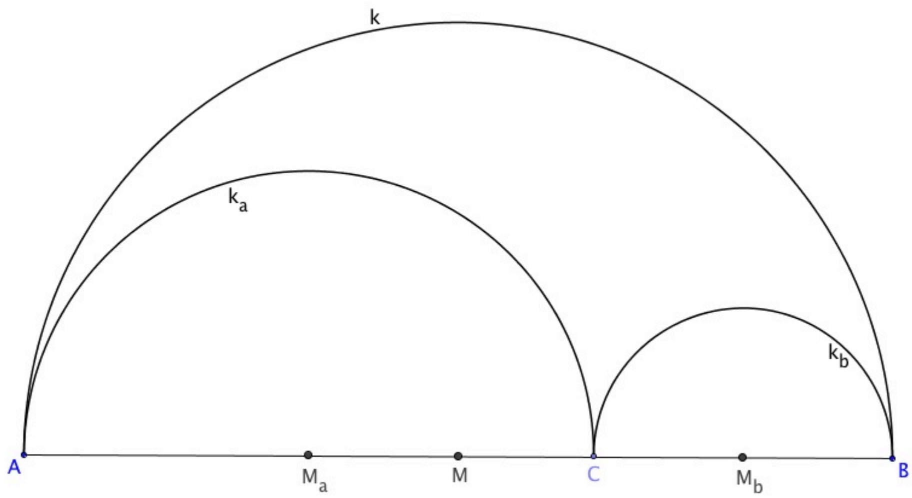
5. Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen
   Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

   Sie sehen rechts einen vollständig beschrifteten Würfel. Hier drunter sehen Sie Würfel, die gegenüber dem Ausgangswürfel verdreht sind und bei denen zwei Ecken beschriftet sind. Ergänzen Sie die logisch richtige Beschriftung der übrigen Ecken.





Arbeitsblatt zur Aufgabe 4



1. Zeichne in C die Senkrechte zu AB (Name g).
2. Schlage um A einen Kreis(bogen) mit dem Radius |AB|, so dass der Schnittpunkt S (oberhalb von k) mit der Geraden g gefunden wird.
3. Zeichne die Strecke $\overline{AS}$ und dann eine Senkrechte zu AS durch S. Diese schneidet die Gerade AB in C'.
4. Zeichne durch B eine Senkrechte zu AB (Name k') und durch C' eine Senkrechte zu AB (Name k'_a).
5. Zeichne zur Strecke $\overline{BC'}$ den Mittelpunkt F.
6. Zeichne durch F eine Senkrechte zu AB (Name m).
7. Zeichne über $\overline{BC'}$ den Halbkreis k'_b. Er schneidet m in G.
8. Schlage um G einen Kreis mit dem Radius |GF|. Er schneidet m außer in F noch in H.
9. Schlage um H einen Kreis mit dem Radius |HG|. Er berührt k' in I und k'_a in J.
10. Verbinde A mit I. Die Strecke schneidet k in I'. (*I' ist der Berührpunkt des gesuchten Inkreises mit k.*)
11. Verbinde A mit J. Die Strecke schneidet k_a in J'. (*J' ist der Berührpunkt des gesuchten Inkreises mit k_a.*)
12. Verbinde I' mit M und zeichne den Strahl von M_a über J' hinaus.
13. Der Schnittpunkt der beiden Linien aus 11. und 12. ist Z, *der Mittelpunkt des gesuchten Inkreises*.
13. Zeichne um Z einen Kreis mit dem Radius |ZI'|. Das ist der gesuchte Inkreis.