Dr. R. Albers Mathematisches Denken u. Lehren 2 SoSe 14

10. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNGEN

1a. explizit $a_n = a_1 + (n-1)d$

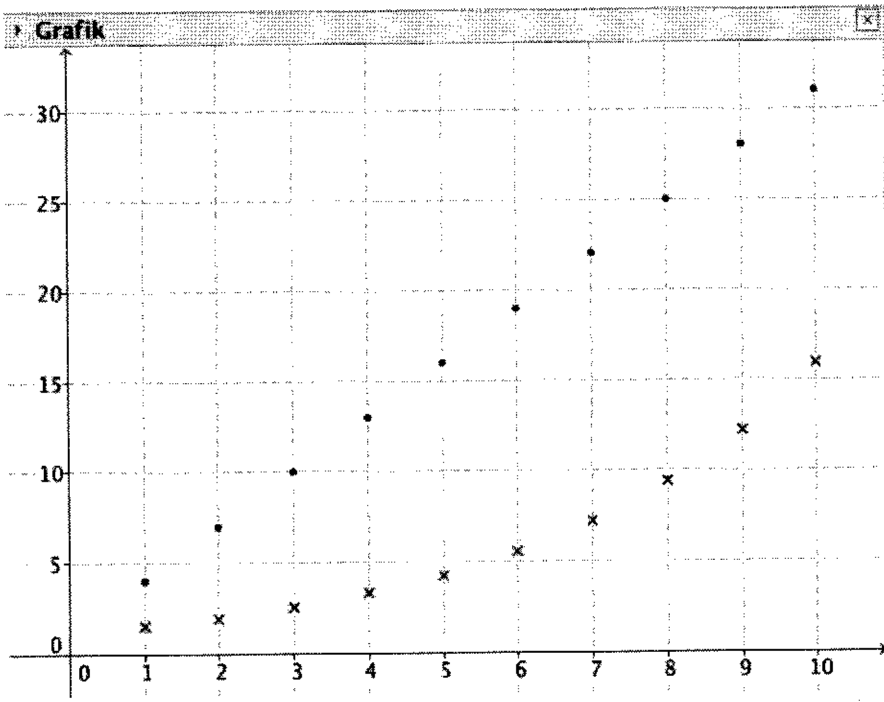
hier: $a_1 = 4$, $d = 3$ also $a_n = 4 + (n-1)3$

$= 1 + 3n$

b. explizit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

hier: $g_1 = 1{,}5$ $q = 1{,}3$ also $g_n = 1{,}5 \cdot 1{,}3^{n-1}$

c., d. (Geogebra-Ausdruck)



Tabelle

	A	~~B~~ a	~~C~~ g
1	1	4	1.5
2	2	7	1.95
3	3	10	2.535
4	4	13	3.296
5	5	16	4.284
6	6	19	5.569
7	7	22	7.24
8	8	25	9.412
9	9	28	12.236
10	10	31	15.907
11			
12		•	×
13			
14			
15			
16			

e. $n = 20$: $a_{20} = 61$ $g_{20} = 1{,}5 \cdot 1{,}3^{19} = 219, \ldots$

$n = 15$: $a_{15} = 46$ $g_{15} = 1{,}5 \cdot 1{,}3^{14} = 59, \ldots$

$n = 12$: $a_{12} = 37$ $g_{12} = 1{,}5 \cdot 1{,}3^{11} = 26, \ldots$

$n = 13$: $a_{13} = 40$ $g_{13} = 1{,}5 \cdot 1{,}3^{12} = 34{,}9 \ldots$

$n = 14$ $a_{14} = 43$ $g_{14} = 1{,}5 \cdot 1{,}3^{13} = 45{,}4 \ldots$

Ab $n \geq n_0 = 14$ ist $g_n > a_n$.

HAUSÜBUNGEN

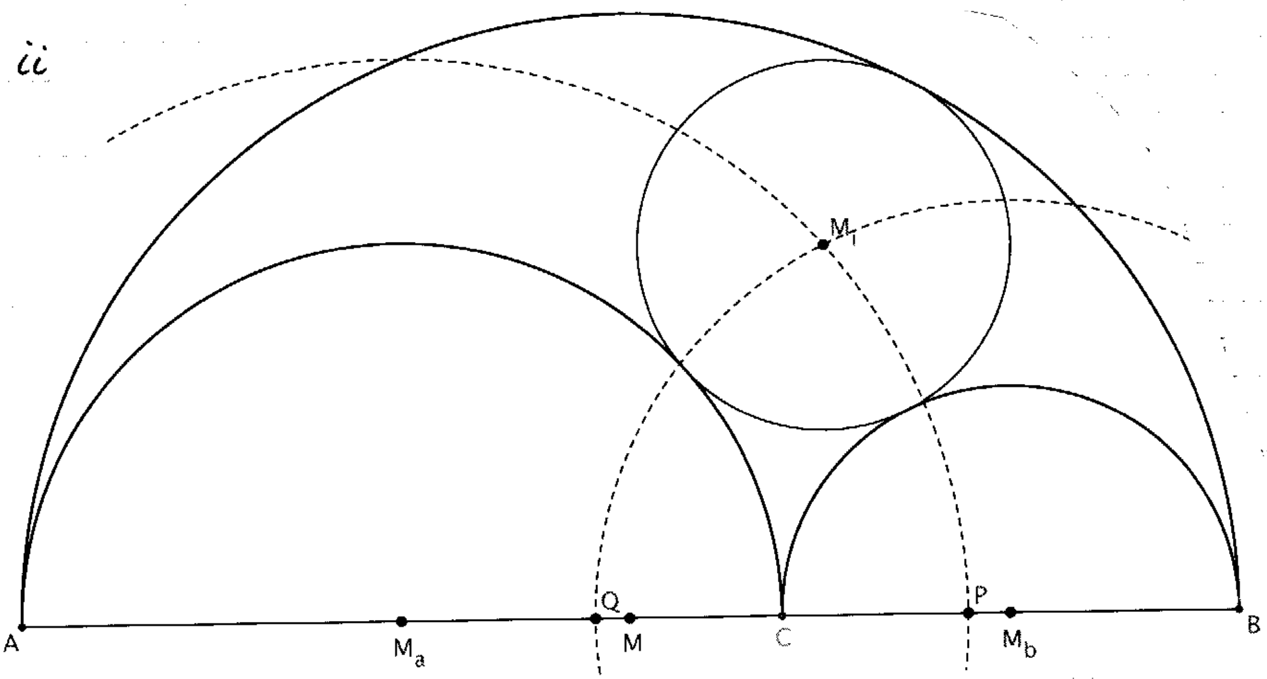
2a. i. $a = 5\,cm$ $\quad b = 3\,cm$

$$r = \frac{5 \cdot 3 \cdot 8}{25 + 15 + 9} = \frac{120}{49} \approx 2{,}45$$

1

Der Inkreis hat einen Radius von $r \approx 2{,}45\,cm$

ii



Mit dem berechneten Radius $r \approx 2{,}45$ zeichnet man den Punkt P mit $|M_a P| = a + r$ und den Punkt Q mit $|M_b Q| = b + r$. Die Kreise um M_a mit dem Radius $a+r$ und um M_b mit $b+r$ schneiden sich in M_i. Um M_i zeichnet man den Inkreis mit dem Radius r.

3

b. Für $a = b$ gilt

$$r = \frac{a \cdot b\,(a+b)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{a \cdot a \cdot 2a}{a^2 + a^2 + a^2} = \frac{2a^3}{3a^2} = \frac{2}{3}a$$

$a = b \Rightarrow r = \frac{2}{3}a$

1

-->

c) Skizze:

$A \overset{2a}{\longleftrightarrow} C \overset{2b}{\longleftrightarrow} B$

$2a = \varphi|AB|$ $\quad$ $2b = |AB| - \varphi|AB|$

Im „goldenen Arbelos" gilt

$2a = \varphi|AB| \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}\varphi|AB|$

$1-\varphi = \varphi^2$ Def. gold. Schnitt

$2b = |AB| - \varphi|AB| = (1-\varphi)|AB| = \varphi^2|AB|$

$\Rightarrow \quad b = \frac{1}{2}\varphi^2|AB|$ $\qquad$ Ansatz 1

einsetzen in die Formel für r

$$r = \frac{\frac{1}{2}\varphi|AB| \cdot \frac{1}{2}\varphi^2|AB| \cdot (\varphi+\varphi^2)\frac{1}{2}|AB|}{\varphi^2 \cdot \frac{1}{4}|AB|^2 + \varphi^3 \cdot \frac{1}{4}|AB|^2 + \varphi^4 \cdot \frac{1}{4}|AB|^2}$$

$$= \frac{\varphi^3(\varphi+\varphi^2)}{\varphi^2+\varphi^3+\varphi^4} \cdot \frac{(\frac{1}{2}|AB|)^3}{\frac{1}{4}|AB|^2} \qquad | \text{ kürzen}$$

$$= \frac{\varphi(\varphi+\varphi^2)}{1+\varphi+\varphi^2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \qquad | \; 1-\varphi = \varphi^2 \Leftrightarrow \varphi+\varphi^2 = 1$$

$$= \frac{\varphi \cdot 1}{1+1} \cdot \frac{1}{2}|AB| = \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| = \frac{a}{2} \quad \square$$

2

3 a. max Übungspunkte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
15	18	13	17	22	16	11,5	17,5	15,5	

also $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$W = \{13; 15; 16; 17; 18; 15{,}5; 17{,}5; 22; 11{,}5; 25\}$

Die Zuordnung ist eine Funktion, da es zu jeder Übung genau eine max. Punktzahl gibt.

14 gehört nicht zur Wertemenge, da es in keiner Übung max. 14 Punkte gab.

1,5

b. $D = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$
$W = \{7, 9, 13, 10\}$
Die Zuordnung ist eine Funktion, da jede Zahl genau eine Quersumme hat.
1 gehört nicht zur Wertemenge, da es keine zweistellige Quadratzahl mit der Quersumme 1 gibt

1,5

c. Beispiele: $\frac{1}{3} \to 4$ $\quad \frac{7}{72} \to 79$ $\quad \frac{42}{43} \to 85$
D = Menge aller rationalen Zahlen von 0 bis 1
$W = \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$
Die Zuordung ist eine Funktion, denn die Summe aus Zähler und Nenner ist eindeutig bestimmt. 2 gehört nicht zur Wertemenge, da ~~der~~ die 2 nur $\frac{1}{1}$ zugeordnet ~~wird~~ ist aber $\frac{1}{1}$ nicht in D liegt.

1,5

d. $D = \{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\}$
$W = \{2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$
Die Zuordnung ist eine Funktion, da es zu jeder Zahl genau eine nächst größere Zweierpotenz gibt. 30 gehört nicht zur Wertemenge, da 30 keine Zweierpotenz ist.

1,5

4a. Ansatz $\quad y = mx + b$

$$\left.\begin{array}{ll} A(-1; \frac{1}{6}): & \frac{1}{6} = -m + b \\ B(3; \frac{8}{3}): & \frac{8}{3} = 3m + b \end{array}\right] -$$

$$\frac{15}{6} = 4m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{5}{8}$$

$$b = \frac{1}{6} + \frac{5}{8} = \frac{4+15}{24} = \frac{19}{24}$$

also: $y = \frac{5}{8}x + \frac{19}{24}$ 2

b. Ansatz: $y = a \cdot b^x$

$A(-1; \frac{1}{6})$ $\frac{1}{6} = a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \frac{1}{6}b$

$B(3; \frac{8}{3})$ $\frac{8}{3} = a \cdot b^3$ a einsetzen

$$\frac{8}{3} = \frac{1}{6} b \cdot b^3$$

$$b^4 = 6 \cdot \frac{8}{3} = 16 = 2^4$$

$b = 2$ einsetzen in $a = \frac{1}{6}b$

$$a = \frac{1}{3}$$

also $y = \frac{1}{3} \cdot 2^x$ 2

c. Ansatz: $y = x^2 + bx + c$

$A(-1; \frac{1}{6})$ $\frac{1}{6} = 1 - b + c$ −

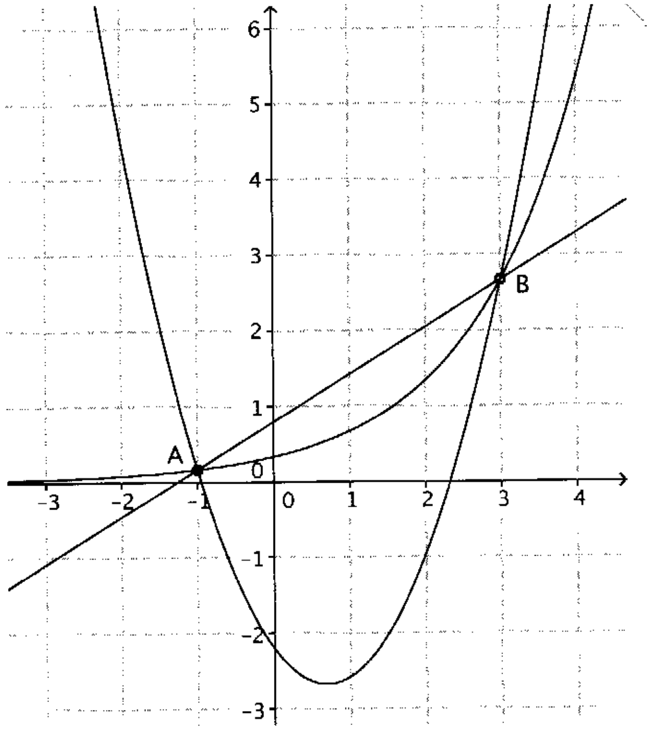
$B(3; \frac{8}{3})$ $\frac{8}{3} = 9 + 3b + c$

$$\frac{15}{6} = 8 + 4b \Rightarrow b = -\frac{11}{8}$$

in 1. Gleich: $\frac{1}{6} = 1 + \frac{11}{8} + c \Rightarrow c = -\frac{53}{24} = -2\frac{5}{24}$

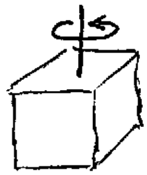
also $y = x^2 - \frac{11}{8}x - \frac{53}{24}$ 2

4 d.



1

5. Man kann jede der 6 Seiten nach unten legen. Hält man diese Seite fest (unten), so kann man den Würfel immer noch um die senkrechte Mittelachse drehen, so dass eine von den 4 Seitenflächen nach vorn kommt.



Hält man auch noch die Vorderfläche fest, kann man den Würfel nicht mehr bewegen, so dass das alle Möglichkeiten sind. Kombiniert sind das

$6 \cdot 4 = 24$ Positionen.

2

A2	3	4	5	Σ
8	6	7	2	23