9. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNG

1a Da $DC \parallel FI$, ist auch $|CI| = s$

Pyth. in ΔMIF: $|MI|^2 + |IF|^2 = |MF|^2$

$$(a-b+s)^2 + h^2 = (a+b)^2$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + s^2 + 2as - 2bs - 2ab + h^2 = \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} \quad (1)$$

Pyth. in ΔIBF: $|IB|^2 + |IF|^2 = |BF|^2$

$$(2b-s)^2 + h^2 = (2b)^2$$

$$\cancel{4b^2} - 4bs + s^2 + h^2 = \cancel{4b^2} \quad (2)$$

Nun beide Gleichungen so kombinieren, dass h herausfällt.

$(2) \Rightarrow \; s^2 + h^2 = 4bs$ Einsetzen in 1 für $s^2 + h^2$

$$4bs + 2as - 2bs - 2ab = 2ab$$

Gleichung nach s auflösen

$$2bs + 2as = 4ab \quad |:2, \; s \text{ ausklammern}$$

$$(a+b)s = 2ab$$

$$s = \frac{2ab}{a+b}$$

Anm: Das ist gerade das Doppelte des Radius der Archimed. Zwillinge

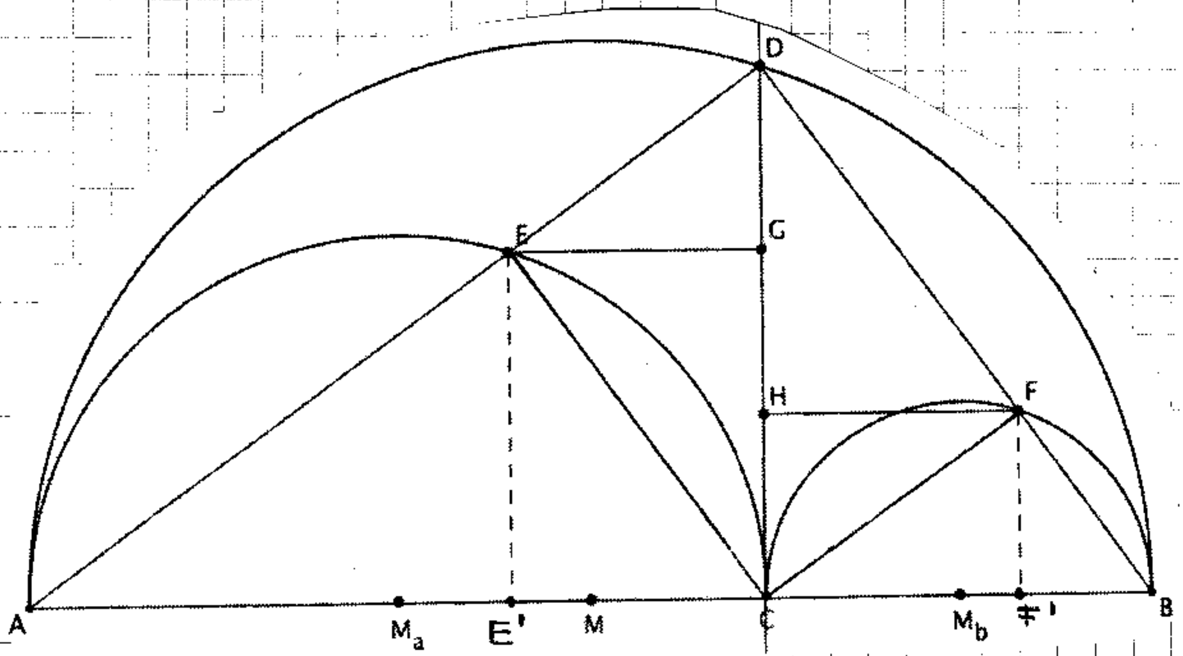
b. Im ΔMBF darf man den Höhensatz nicht anwenden, da es nicht rechtwinklig ist.

c. Der Punkt E entspricht dem Punkt F wenn man die Rollen von a und b vertauscht.

Das Ergebnis $|FH| = s = 2\frac{ab}{a+b}$ ist symmetrisch bezüglich a und b. Also erhält man für $|EG|$ das gleiche Ergebnis.

HAUSÜBUNGEN

2.



Ergänzungen in der Zeichnung: $\overline{EC}$ u. $\overline{FC}$

E' ist Fußpunkt des Lots von E auf AB

F' " " " " " F " "

a) $|EG| = |E'C|$ und $|HF| = |CF'|$

Skalierung

$\triangle ABD \xrightarrow{s=\frac{a}{a+b}} \triangle ACE$

denn die Kante $\overline{AB}$ mit $|AB| = 2(a+b)$ wird skaliert auf die Kante $\overline{AC}$ mit $|AC| = 2a$

ebenso Skalierung

$\triangle ABD \xrightarrow{s=\frac{b}{a+b}} \triangle CBF$

den $|AB| = 2(a+b) \longrightarrow |CB| = 2b$

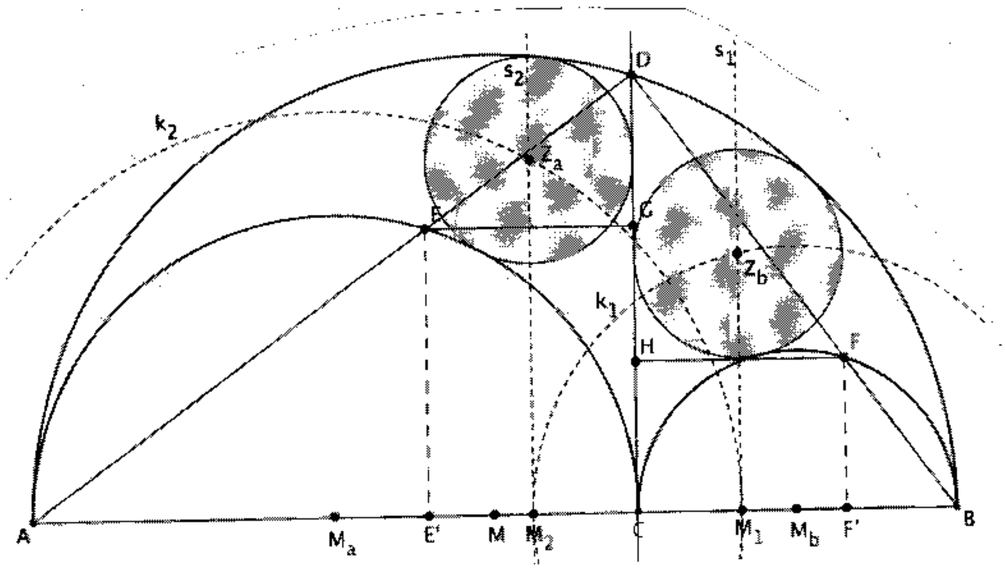
Der rechte Hypotenusenabschnitt $\overline{CB}$ des $\triangle ABD$ wird abgebildet auf den rechten Hypoten. abschn. des $\triangle ACE$ mit $s = \frac{a}{a+b}$. Also $|CB| = 2b \longrightarrow$

$|E'C| = 2\frac{ab}{a+b}$

Ebenso wird der linke Hypot. abschn.
von ΔABD abgebildet auf den linken Hyp. ab.
von ΔCBF mit $s = \frac{b}{a+b}$
$|AC| = 2a \rightarrow |CF'| = 2\frac{ab}{a+b}$

Dann folgt insgesamt
$|EG| = |E'C| = 2\frac{ab}{a+b} = |CF'| = |HF|$ (3)

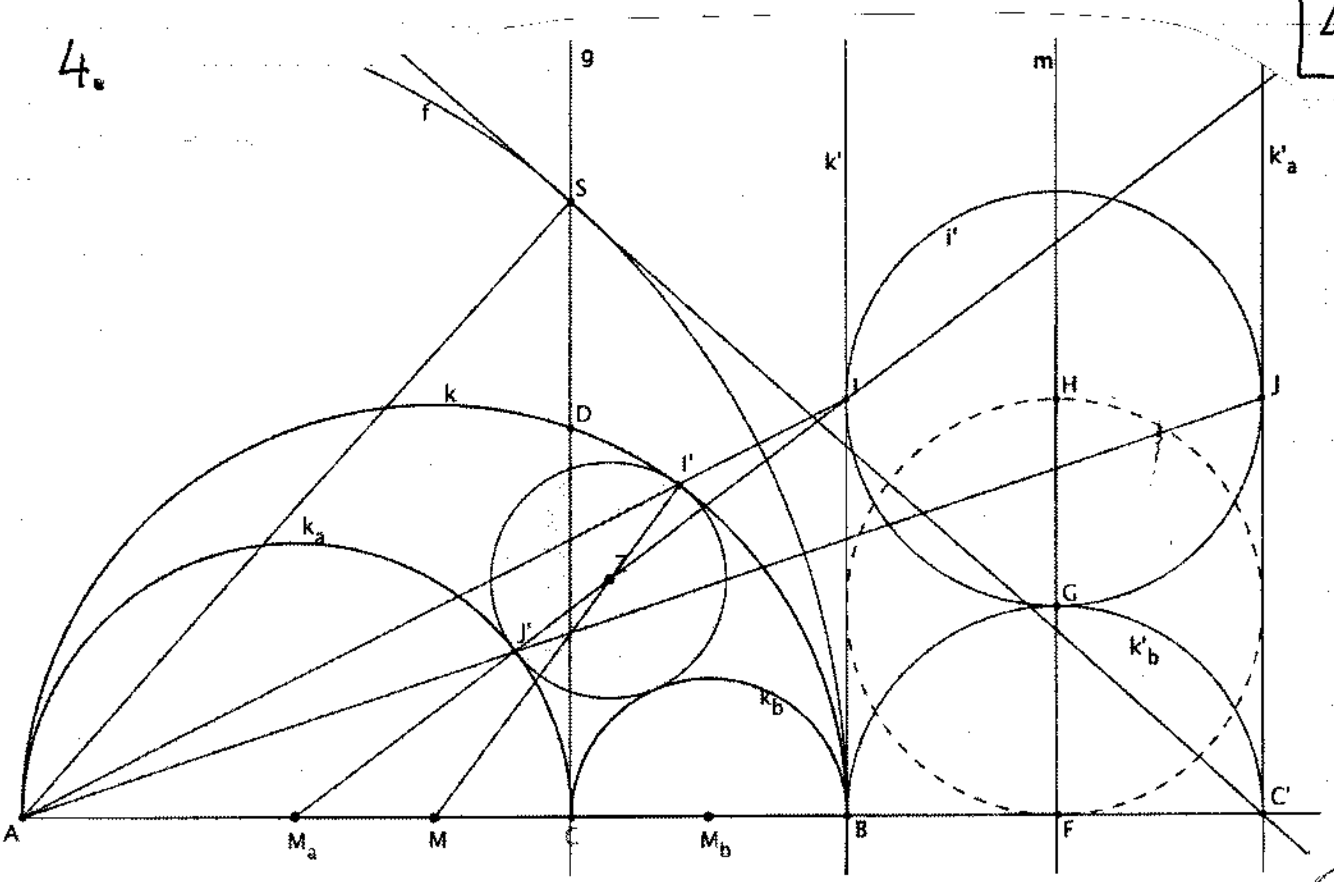
b) Konstruktion d. Archimedischen Zwillinge
1. Zeichne den Mittelpunkt M_1 der Strecke $\overline{CF'}$.
2. " " " M_2 " " $\overline{E'C}$.
3. Zeichne durch M_1 eine Senkrechte zu AB (Name s_1)
4. " " M_2 " " " " (Name s_2)
5. Zeichne um M_a einen Kreis k_2 mit Radius $|M_a M_1|$.
6. " " M_b " " k_1 mit " $|M_b M_2|$.
7. Der Schnitt von s_2 mit k_2 ist Z_a, der Mittelpunkt des linken Archimedischen Zwillings
8. Der Schnitt von s_1 mit k_1 ist Z_b, der Mittelpunkt des rechten Archim. Zwillings.
9. Schlage um Z_a und Z_b jeweils Kreise mit dem Radius $|CM_1|$. (2)



(2)

4.

4



(4)

3. Termumformungen

(1) → (2) ordnen: Terme mit s nach rechts, ohne s nach links

(2) → (3) Division durch 2, in der rechten Gleichung auch links r und rechts s ausgeklammert

(3) → (4) linke Gl mit (a+b), rechte Gl mit b multipliziert, damit in beiden Gl. die rechten Seiten gleich werden

(4) → (5) Die beiden linken Seiten werden gleichgesetzt

(5) → (6) Die Klammern werden ausmultipliziert

(6) → (7) Zusammenfassen und ordnen: Terme mit r nach links, ohne r nach rechts

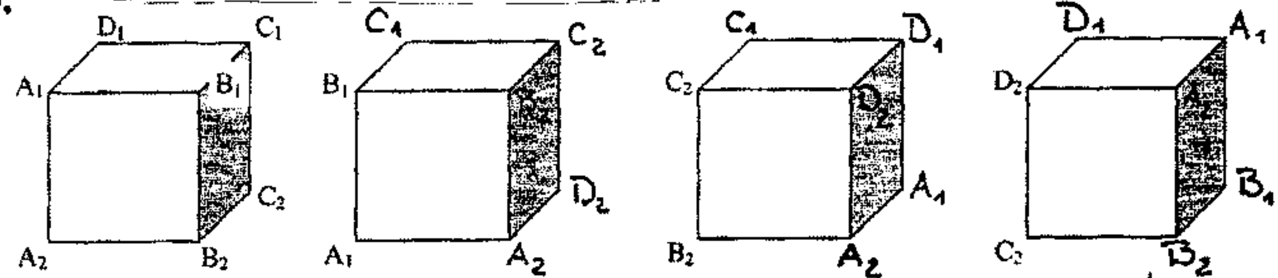
3 (Fortsetzung)

(7) -> (8) links r ausklammern, rechts ab. Durch 2 teilen

(8) -> (9) durch (a^2+ab+b^2) dividieren und damit nach r auflösen

3

5.



je $\frac{1}{2}$

A2	A3	A4	A5	Σ
7	3	4	$1\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$