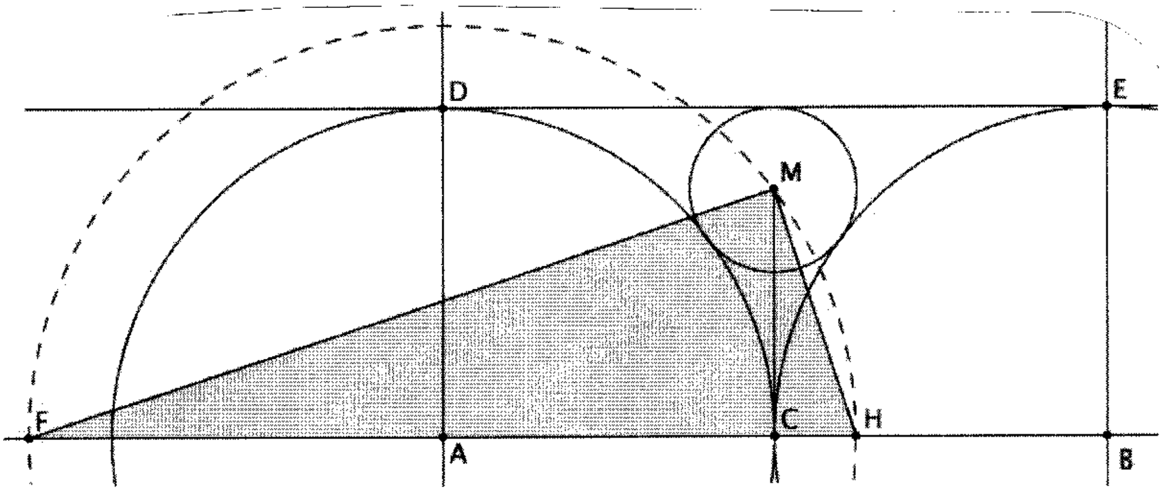
8. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNG

1.



a) $|AC| = R$, $|CH| = r$, $|HB| = R - r$

$|AF| = R + r$, $|FC| = 2R + r$, $|CM| = R - r$

b) Das Dreieck FHM ist nach dem Thalessatz rechtwinklig. In diesem gilt der Höhensatz:

$|CM|^2 = |FC| \cdot |CH|$ Wie in a) gefunden gilt dann

$(R - r)^2 = (2R + r) \cdot r$ Das ist eine Gleichung für die Unbekannte r. (R gilt als bekannt)

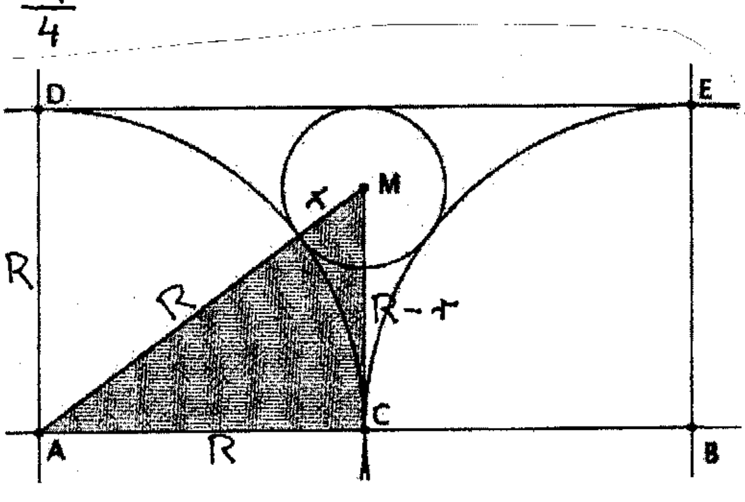
$$R^2 - 2Rr + r^2 = 2Rr + r^2$$

$$R^2 = 4Rr \quad |:R$$

$$4r = R \quad |:4$$

$$r = \frac{R}{4}$$

c) Ein alternativer Ansatz ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ACM mit dem Satz von Pythagoras.

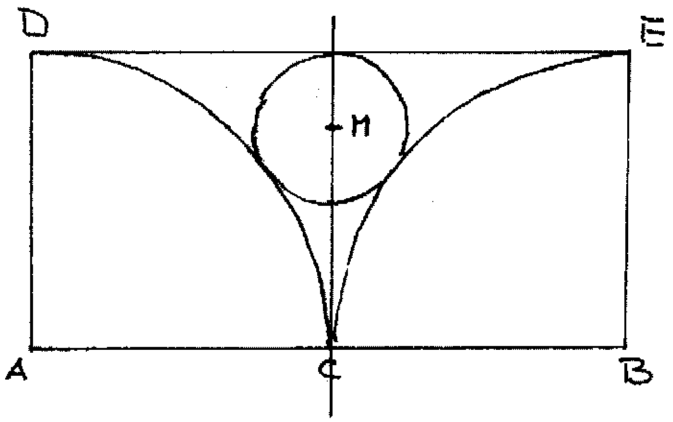


1c (Fortsetzung)

$$R^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$$
$$R^2 + \cancel{R^2} - 2Rr \cancel{+r^2} = \cancel{R^2} + 2Rr \cancel{+r^2}$$
$$R^2 = 4Rr \quad |:R$$
$$4r = R \quad |:4$$
$$r = \frac{R}{4}$$

(Dieser Ansatz ist deutlich einfacher)

d) Das Rechteck ABED mit $|AB| = 2R$ und $|BE| = R$ ist vorgegeben mit den Kreisen um A und B mit dem Radius R

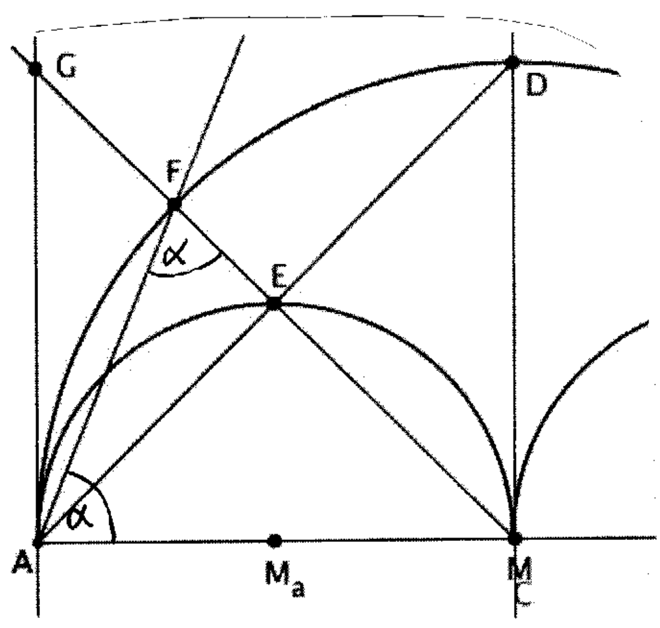


Wegen der Symmetrie der Figur liegt M auf der Senkrechten zu AB durch C. Zum gegebenen R wird $r = \frac{R}{4}$ konstruiert.

M hat von der Geraden DE den Abstand r.

HAUSÜBUNGEN

2. a. Da $|AM| = |MD| = a+b$, und $\overline{AM}$ und $\overline{MD}$ senkrecht zueinander sind, ist ΔAMD ein halbes Quadrat.
Also ist $|\sphericalangle MAD| = 45°$



1

Da $|\sphericalangle MAG| = 90°$ nach Konstruktion, ist

$|\sphericalangle EAG| = 90° - 45° = 45°$ 0,5

Da E auf dem kleinen, linken Halbkreis liegt,

ist nach dem Thaleskreis (Satz v. Thales) $|\sphericalangle AEM| = 90°$

Dann gilt nach der Winkelsumme im ΔAME:

$45° + 90° + |\sphericalangle EMA| = 180° \Rightarrow |\sphericalangle EMA| = 45°$. 1,5

b. Das ΔAMF ist gleichschenklig ($|AM| = |MF|$),

also sind die Winkel $\sphericalangle MAF$ und $\sphericalangle AFM$

gleich groß, sagen wir α. 1

Winkelsumme im ΔAMF: $2\alpha + 45° = 180°$

$\Rightarrow 2\alpha = 135° \Rightarrow \alpha = 67{,}5°$ 1

Zieht man von α den Winkel $\sphericalangle MAE$ mit $45°$

ab, erhält man $|\sphericalangle EAF| = 22{,}5°$. Das ist

die Hälfte von $|\sphericalangle EAG| = 45°$. Also halbiert

AF den Winkel $\sphericalangle EAG$ □ 1

3. a. $|AB| = a$ 3

$|AH| = r$ je 0,5

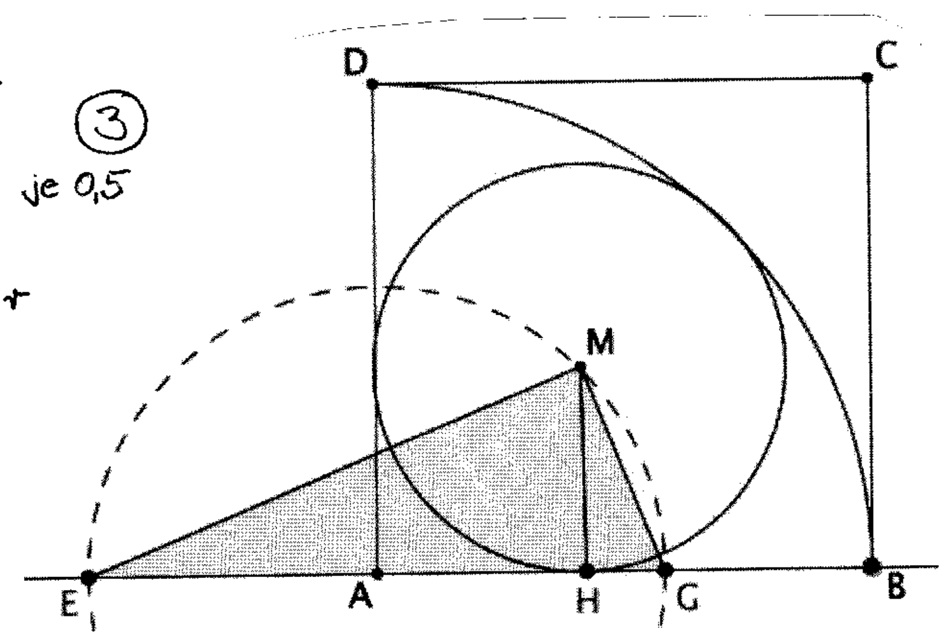
$|GB| = r$

$|HG| = a - 2r$

$|EA| = a - r$

$|HM| = r$

$|AM| = a - r$



b. Ansatz mit dem Höhensatz: $|HM|^2 = |EH| \cdot |HG|$ Längen aus a. einsetzen: $r^2 = a \cdot (a - 2r)$ 1

Gleichung nach r auflösen

* $r^2 = a^2 - 2ar$ quadratische Gleichung in r

$r^2 + 2ar - a^2 = 0$

$r = -a \pm \sqrt{a^2 + a^2} = -a \pm a\sqrt{2}$

$r = -a - a\sqrt{2}$ ist geometrisch nicht sinnvoll, also

$r = -a + a\sqrt{2} = \underline{\underline{a(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}414\,a}}$ (2)

---

alternativer Ansatz mit dem Satz v. Pythagoras

$|AM|^2 = |AH|^2 + |HM|^2$ Längen aus a einsetzen

$(a - r)^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ (1)

$a^2 - 2ar \cancel{+ r^2} = \cancel{2}r^2$ gleiche Gleichung wie *

---

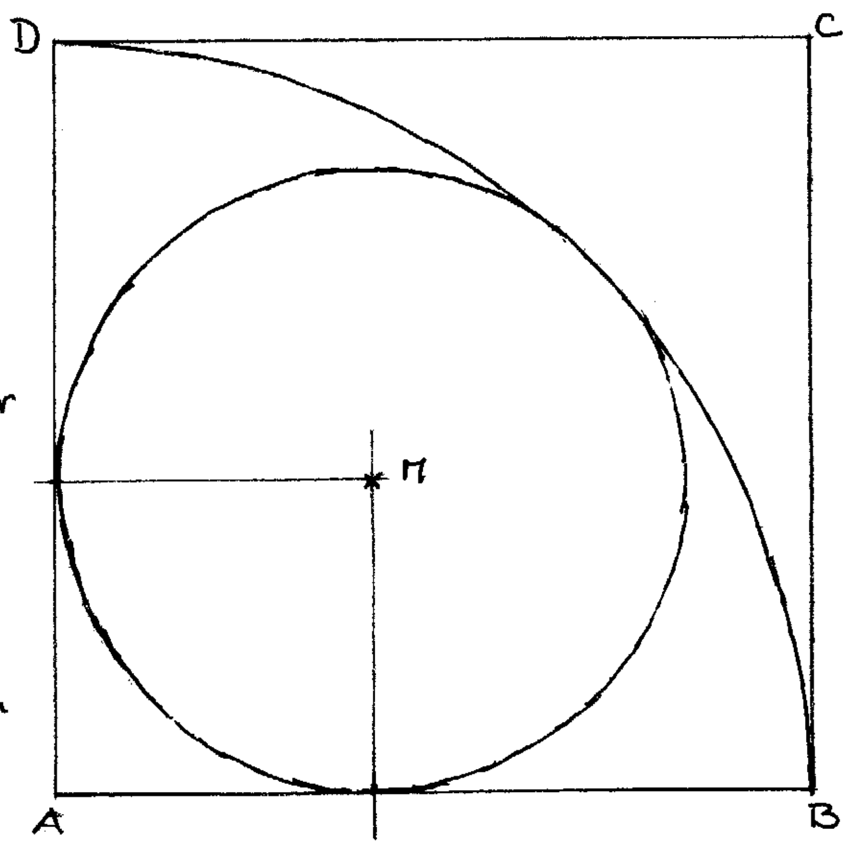
c.

$a = 10\,\text{cm}$

$r \approx 0{,}414 \cdot 10\,\text{cm}$

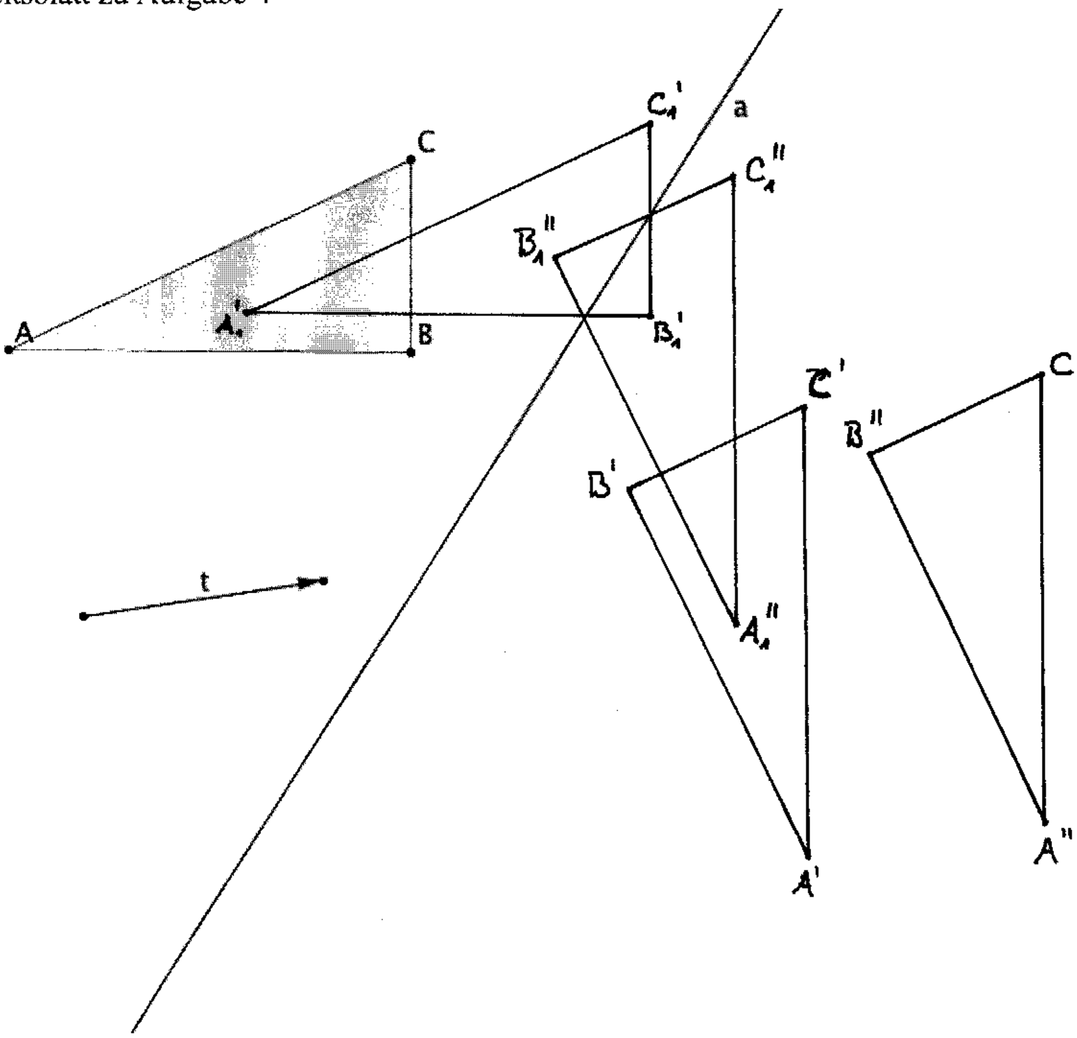
$\approx 4{,}14\,\text{cm}$

Man trägt von A die Entferung von r auf $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ ab und zeichnet Parallelen zu AB und AD in diesem Abstand. Ihr Schnittpunkt



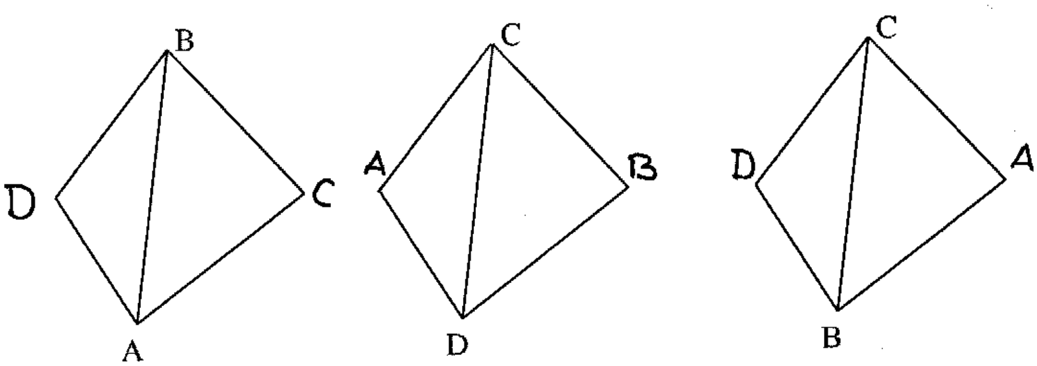
ist M. Um M zeichnet man einen Kreis mit r. (2)

Arbeitsblatt zu Aufgabe 4



Die beiden Enddreiecke stimmen nicht überein.
Die beiden Abbildungen sind nicht kommutativ. 2

Aufg 5



je $\frac{1}{2}$ 1,5

A2	A3	A4	A5	Σ
6	8	2	1,5	17,5