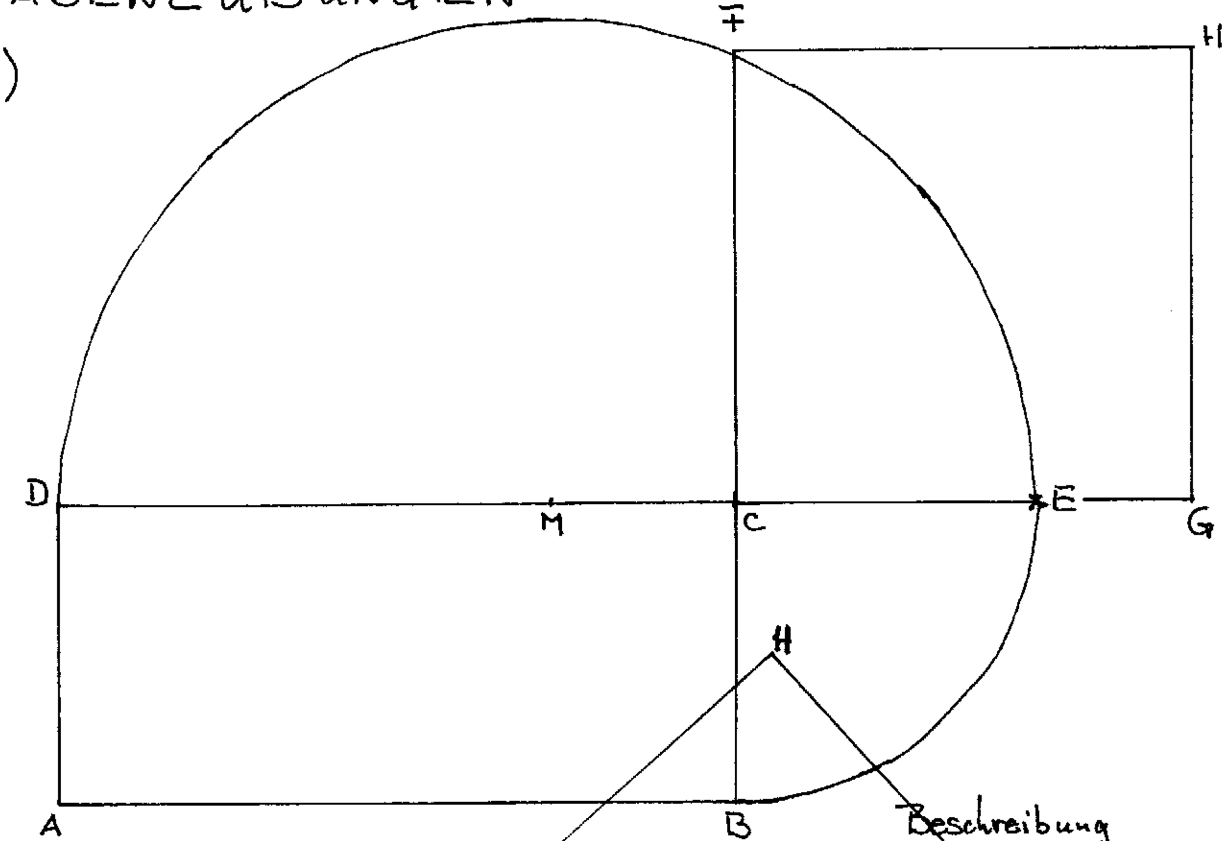
Dr. R. Albers   Mathematisches Denken u. Lehren 2   SoSe 14

7. Übung, Lösungen

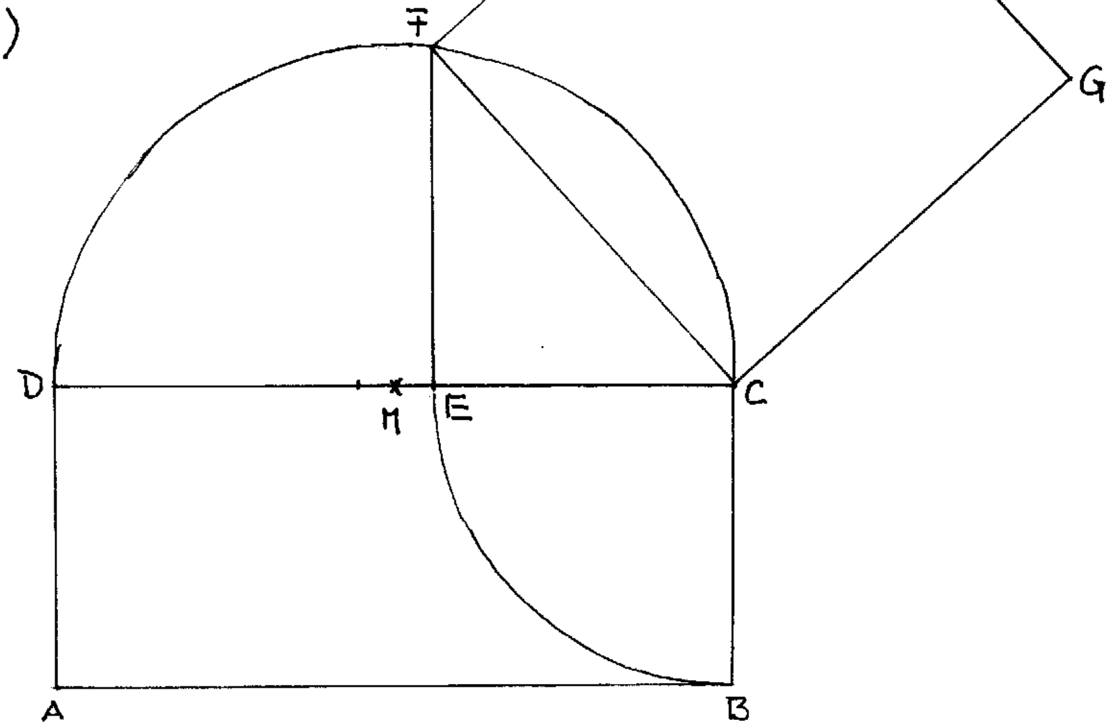
PRÄSENZÜBUNGEN

1. a)



Beschreibung siehe c)

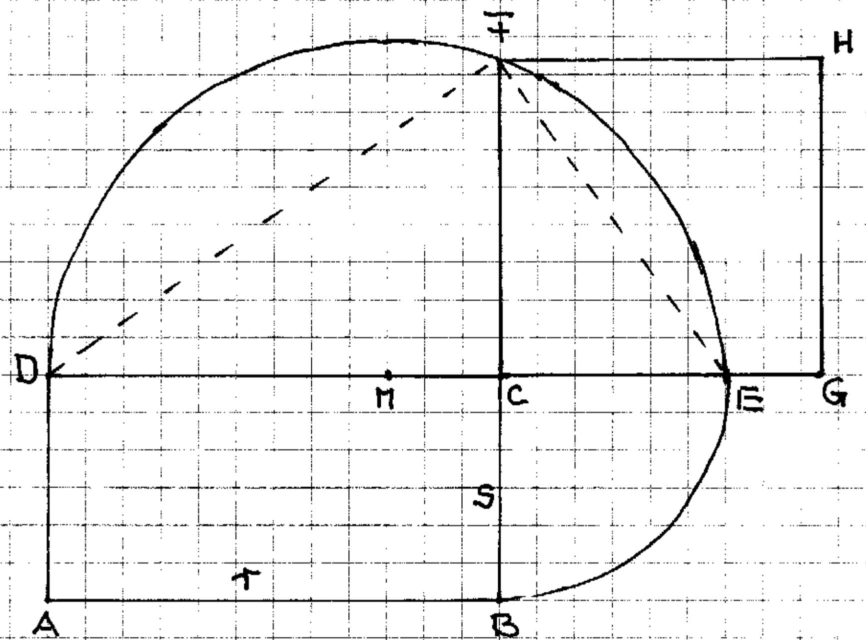
b)



Gegeben ist das Rechteck ABCD. Die Strecke $\overline{BC}$ wird von C auf $\overline{CD}$ abgetragen, man erhält E. ($|EC| = p$). Über CD zeichnet man den Thaleskreis ($|CD| = c$) →

Die Senkrechte zu $\overline{CD}$ durch E schneidet den Thaleskreis in F. $\overline{CF}$ ist dann die gesuchte Strecke a für $a^2 = pc$. (Das rechtwinklige Dreieck ist DCF mit dem rechten Winkel bei F)

c)

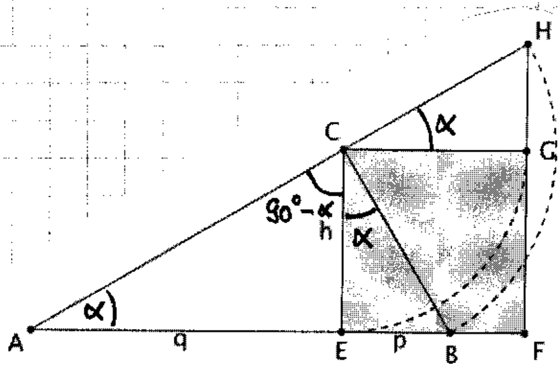


Gegeben ist das Rechteck ABCD mit $|AB| = r$ und $|BC| = s$. $\overline{DC}$ wird über C verlängert und auf der Verlängerung $\overline{BC}$ abgetragen. Man erhält E. Über DE wird der Thaleskreis gezeichnet. Die Senkrechte zu DE durch C schneidet den Thaleskreis in F. $\overline{CF}$ ist die gesuchte Strecke h mit $h^2 = rs$. ($r = \overline{CD}$ und $s = \overline{CE}$ sind die Abschnitte der Hypotenuse $\overline{DE}$)

HAUSÜBUNGEN

2.

a) Die Höhe zerteilt den Winkel $\sphericalangle ACB$ in $90° - \alpha$ und α.
Wegen der Drehung ist der Winkel



$|\sphericalangle GCH| = \alpha$ und $CG \parallel AF$. (1) Dann liegen A, C und H auf einer Geraden wegen:

- Umkehrung der Regel vom Stufenwinkel
- Die Summe aller Winkel mit Scheitel C ergibt 180° (1)

b) links | rechts

links	rechts
ΔAEC mit den Katheten q und h	ΔAJI mit den Katheten h (1) und p
ΔCGH mit den Katheten h und p	ΔIKH mit den Katheten q und h (2)

(1) Begründung: Im linken Dreieck sieht man, dass $|AF| = q + h$ ist. Im rechten Dreieck wird von $\overline{AF}$ mit $\overline{IF}$ die Länge q weggenommen. Also bleibt $|AJ| = h$

(2) Begründung: Im linken Dreieck sieht man, dass $|FH| = h + p$ ist. Im rechten Dreieck wird von $\overline{FH}$ mit $\overline{FK}$ die Länge p weggenommen. Also bleibt $|KH| = h$.

(2)

→

c) Im linken Dreieck AFH werden die beiden weißen Teildreiecke weggenommen und es bleibt h^2 (grau). Im rechten Dreieck AFH werden zwei kongruente Teildreiecke (siehe b)) weggenommen. Also muss die verbleibende Fläche (Rechteck mit Seitenlängen p und q) genau so groß sein wie die verbleibende Fläche links. (vgl. 5. Übung, Aufg. 1)

1

3. (1) → (2) Klammern mit Distributivgesetz ausmultiplizieren | 4

(2) → (3) $+rs - rs$ fällt heraus

(3) → (4) $-s^2 + r^2$ auf beiden Seiten wegnehmen

(4) → (5) ordnen: Terme mit s nach links, ohne s nach rechts

(5) → (6) $:(-2)$

(6) → (7) links s ausklammern, rechts r

(7) → (8) $:(a+b)$ um s zu isolieren (3)

je Fehler (−0,5)

4a Quadratfläche: $A_{\square} = a^2 = 36\,cm^2$

ein Halbkreis: $A_H = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}\,cm^2$

4 Halbkreise: $4A_H = 2\pi\,cm^2$

Restfläche: $A = A_{\square} - 4A_H = 36\,cm^2 - 2\pi\,cm^2$

$\approx \underline{\underline{29{,}72\,cm^2}}$ (1)

b. 4 Halbkreise mit allgemeinem Radius r haben die Fläche $2\pi r^2$

Diese Fläche soll die halbe Quadratfläche ausmachen, also

$2\pi r^2 = \frac{1}{2}a^2$ auflösen nach r

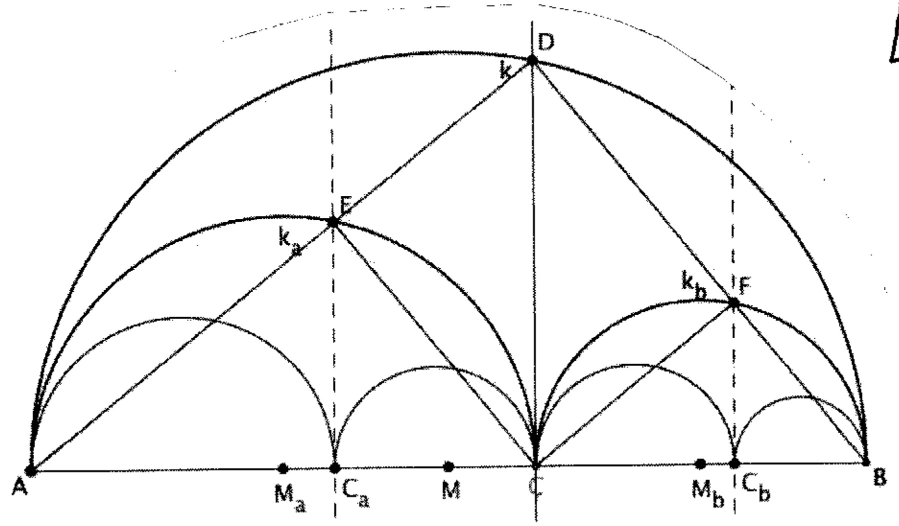
$r^2 = \frac{1}{4\pi}a^2$ also $r = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}a \approx 0{,}282a$

Für a = 6 cm ergibt sich dann $r \approx 1{,}7$ cm (2)

5 a.

$|CD| = 2\sqrt{ab}$

(schon oft gerechnet)



$|AD|^2 = |AC|^2 + |CD|^2 = (2a)^2 + (2\sqrt{ab})^2 = 4a^2 + 4ab = 4a(a+b)$

$\underline{\underline{|AD| = 2\sqrt{a(a+b)}}}$

$|BD|^2 = |CB|^2 + |CD|^2 = (2b)^2 + (2\sqrt{ab})^2 = 4b^2 + 4ab = 4b(a+b)$

$\underline{\underline{|BD| = 2\sqrt{b(a+b)}}}$ (2)

b. $\dfrac{|C_bB|}{|CC_b|} = \dfrac{|BF|}{|FD|}$ 1. Strahlensatz, Zentrum B, Parallelen CD und C_bF

$\dfrac{|BF|}{|FD|} = \dfrac{|CB|}{|AC|}$ 1. Strahlensatz, Zentrum B, Parallelen AD und CF

also $\dfrac{|C_bB|}{|CC_b|} = \dfrac{|CB|}{|AC|} = \dfrac{2b}{2a} = \dfrac{b}{a}$ (2)

c. Der Durchmesser des Ausgangsarbelos ist $|AB| = 2a+2b$

Der Durchmesser des kleinen Arbelos ist $|CB| = 2b$

also ist $s = \dfrac{\text{neue Länge}}{\text{Ausgangsl.}} = \dfrac{2b}{2a+2b} = \dfrac{\cancel{2}b}{\cancel{2}(a+b)} = \dfrac{b}{a+b}$ (1)

d. $\overline{CF}$ ist die mit s skalierte Strecke $\overline{AD}$

also $|CF| = s\cdot|AD| = \dfrac{b}{a+b}\cdot 2\sqrt{a(a+b)} = 2b\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$

ebenso $|BF| = s\cdot|BD| = \dfrac{b}{a+b}\cdot 2\sqrt{b(a+b)} = 2b\sqrt{\dfrac{b}{a+b}}$ (1)

5e. mit $s = \frac{a}{a+b}$ gilt

$$|AE| = s \cdot |AD| = \frac{a}{a+b}\, 2\sqrt{a(a+b)} = 2a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$$

$$|EC| = s \cdot |BD| = \frac{a}{a+b}\, 2\sqrt{b(a+b)} = 2a\sqrt{\frac{b}{a+b}} \qquad 1$$

f. $|C_aC|$ ist der rechte, kleine Halbkreis im linken, verkleinerten Arbelos. Also ist $s = \frac{a}{a+b}$, die Ausgangslänge ist $|CB| = 2b$

also $|C_aC| = \frac{a}{a+b} \cdot 2b = 2\frac{ab}{a+b}$

gleich

analog gilt $|CC_b| = \frac{b}{a+b} \cdot 2a = 2\frac{ab}{a+b}$ 2

g. Der Arbelos über CB ist mit $s = \frac{b}{a+b}$ skaliert gegenüber dem Ausgangsarbelos.

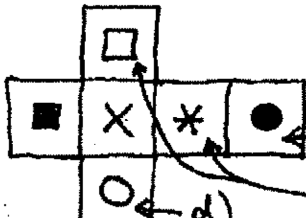
Also $A_b = s^2 \cdot A = \left(\frac{b}{a+b}\right)^2 \pi ab = \pi \frac{ab^3}{(a+b)^2}$ 1

6. Räumliches Vorstellungsvermögen

Durch „Aufklappen" der sichtbaren drei Flächen findet man: Zum Netz 1 gehören:

a) e) f) h) 1

Also gehören zu 2: b) c) d) g)



1. Würfel d) liefert ○
2. Würfel c) liefert ●
3. Würfel b) liefert □, * 1

A2	A3	A4	A5	A6	Σ
5	3	3	10	2	23