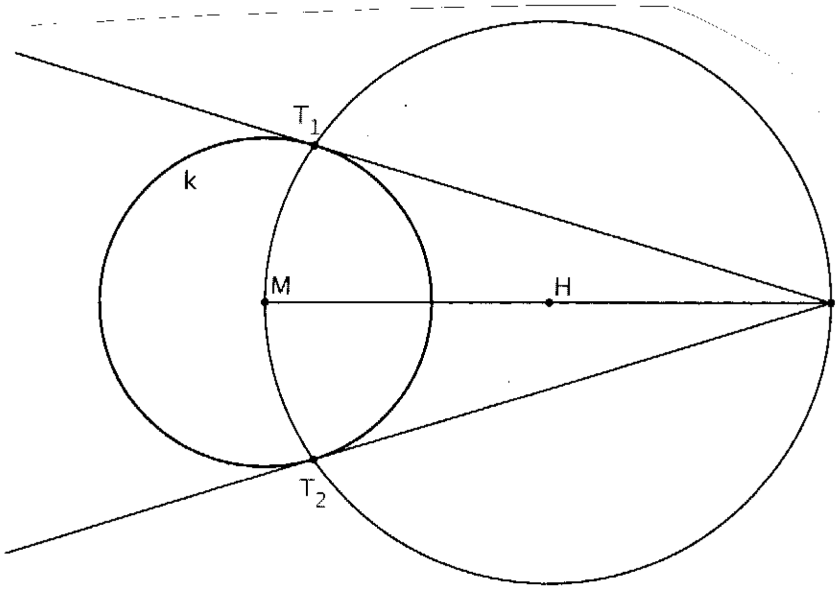
Dr. R. Albers   Mathematisches Denken u. Lehren 2   SoSe 14

6. Übung, Lösungen

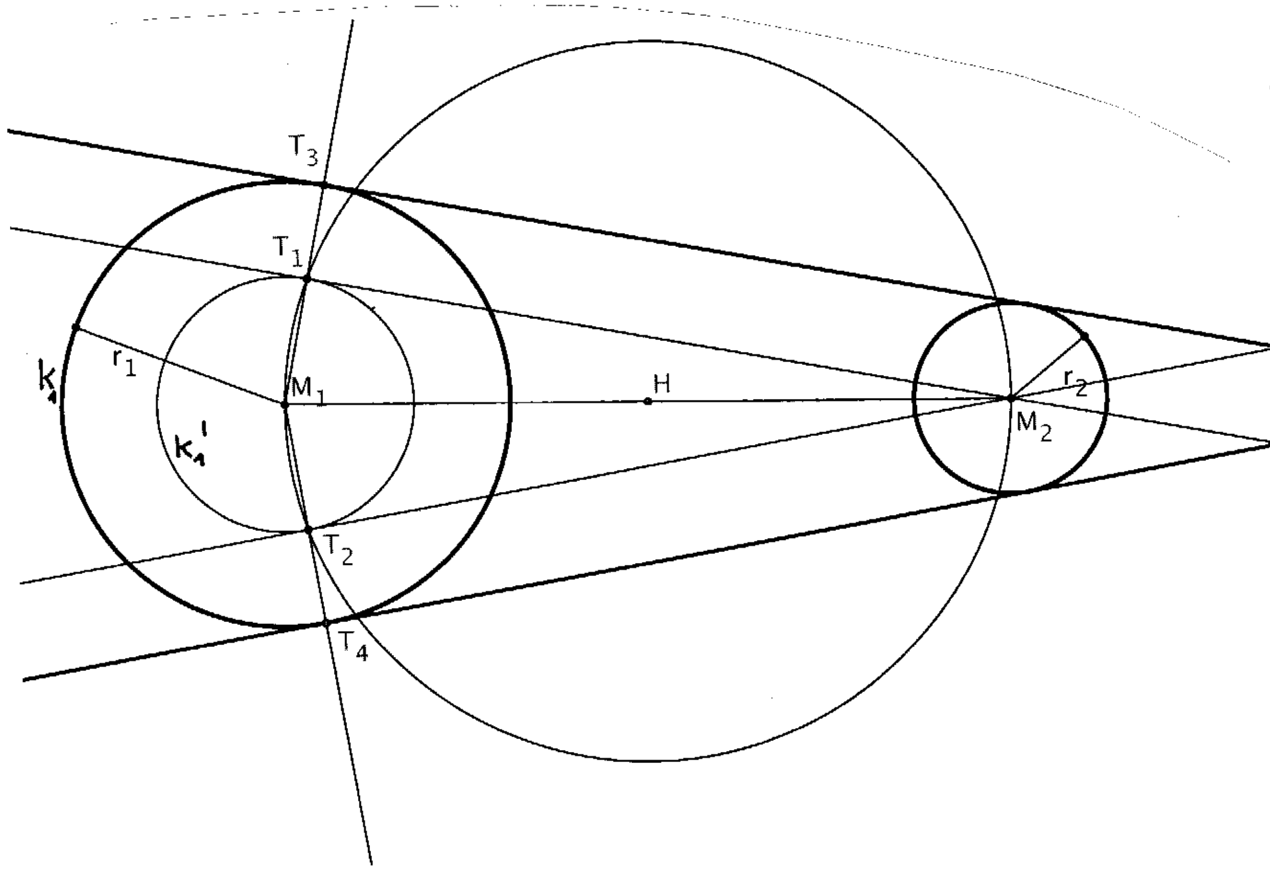
1. a.



Wir konstruieren die Berührpunkte T_1 und T_2 der beiden Tangenten. Da bei T_1 und T_2 rechte Winkel zwischen Radius (nicht gezeichnet) und der Tangente sind, läuft die Konstruktion über den Satz von Thales.

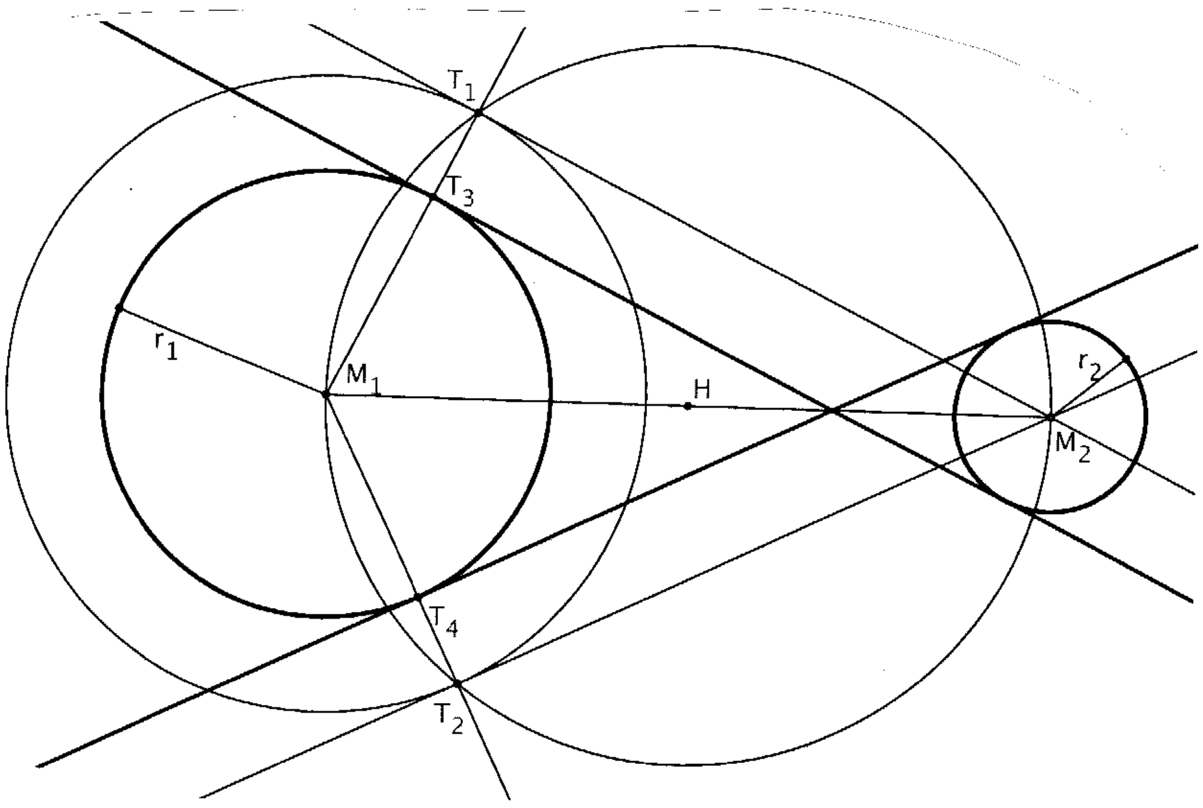
- H ist der Mittelpunkt von $\overline{MP}$
- Der Kreis um H mit dem Radius $|HM|$ ist der Thaleskreis zur Strecke $\overline{MP}$
- Die Schnittpunkte dieses Kreises mit k sind die gesuchten Punkte T_1 und T_2
- Die Geraden PT_1 und PT_2 sind die gesuchten Tangenten durch P an k.

b. Gegeben sind die Kreise k_1 um M_1 mit Radius r_1 und k_2 um M_2 mit Radius r_2 $(r_2 < r_1)$.
- Zeichne den Kreis k_1' um M_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$
- Konstruiere nach a. die Tangenten, die durch M_2 verlaufen und k_1' berühren. Die Berührpunkte sind T_1 und T_2



- Der Strahl von M_1 über T_1 hinaus schneidet k_1 in T_3.
- Der Strahl von M_1 über T_2 hinaus schneidet k_1 in T_4
- Die Parallele zu T_1M_2 durch T_3 ist eine gesuchte Tangente, die Parallele zu T_2M_2 durch T_4 eine weitere.

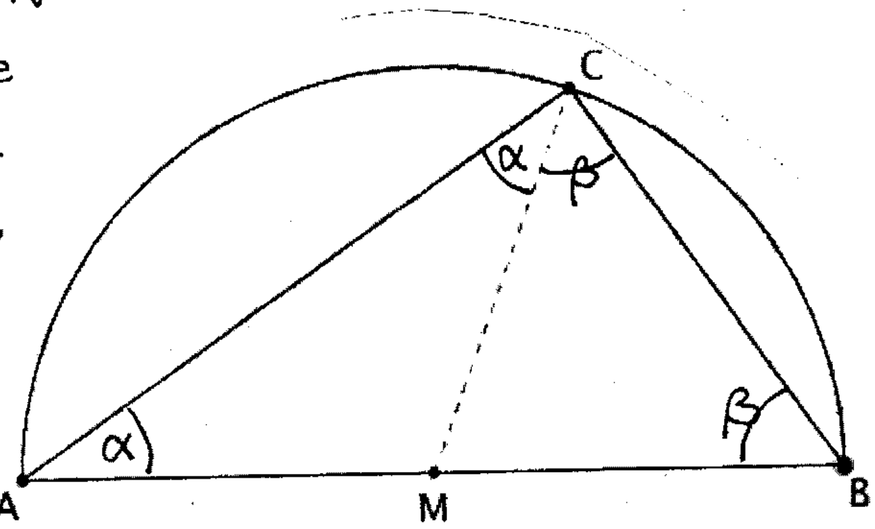
Zwei weitere Tangenten erhält man, wenn man mit dem Hilfskeis k_1' (Mittelpunkt M_1, Radius $r_1 + r_2$) die ausonsten



gleiche Konstruktion durchführt.

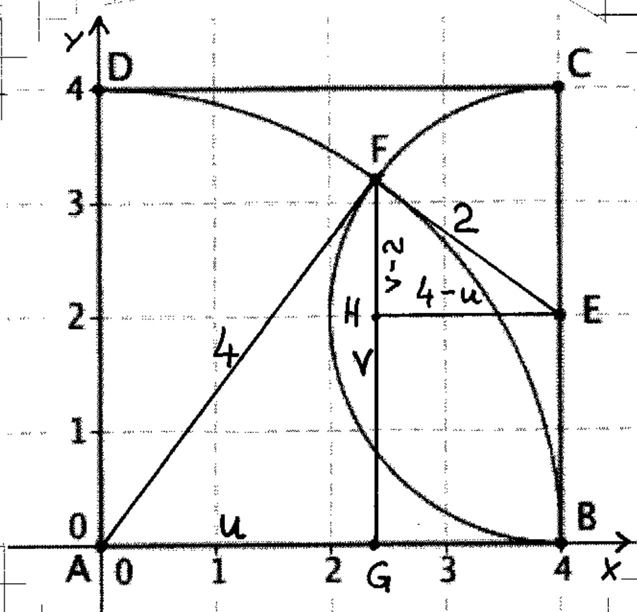
HAUSÜBUNGEN

2. Die Teildreiecke ΔAMC und ΔMBC sind gleichschenklig, da $|AM| = |MB| = |MC|$ Radien des Kreises sind. (1)



Sind wie üblich die Winkel bei A α und bei B β, so ist (1)
$|\sphericalangle ACM| = \alpha$ und $|\sphericalangle MCB| = \beta$. Dann gilt im ΔABC:
$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180°$ $\Rightarrow$ $2\alpha + 2\beta = 180°$ $\Rightarrow$ $\alpha + \beta = 90°$
Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe $\alpha + \beta$, also $90°$. (1)

3. Zeichnet man das Lot von F auf die x-Achse (Fußpunkt G) und von E das Lot auf $\overline{GF}$ (Fußpunkt H), so erhält man: $|FG| = v$, $|AG| = u$
$|EH| = 4 - u$ $FH = v - 2$ (1)
Dann gilt im ΔAGF:



(I) $u^2 + v^2 = 4^2$

und im ΔHEF

$(4-u)^2 + (v-2)^2 = 2^2$ auflösen

(II) $16 - 8u + u^2 + v^2 - 4v + 4 = 4$ (1)

(II) − (I): $16 - 8u - 4v + 4 = -12$

ordnen: $-8u - 4v = -32 \quad | :(-4)$

$$2u + v = 8 \quad | -2u$$

$$v = 8 - 2u$$

Einsetzen in (I)

$u^2 + (8-2u)^2 = 4^2$ auflösen

$u^2 + 64 - 32u + 4u^2 = 16$ zusammenfassen

$5u^2 - 32u + 48 = 0 \quad | :5$

$u^2 - 6{,}4u + 9{,}6 = 0$

$u = 3{,}2 \pm \sqrt{10{,}24 - 9{,}6} = 3{,}2 \pm 0{,}8$

$u = 4$ oder $u = 2{,}4$

Punkt B   Punkt F

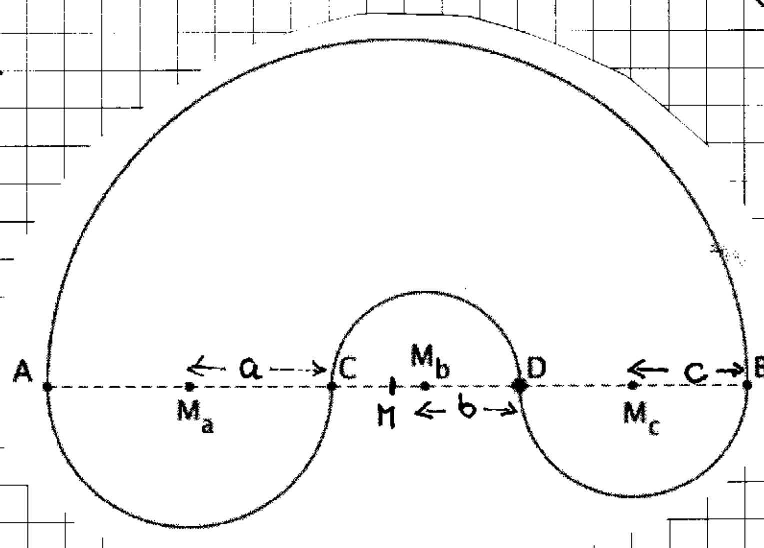
$u = 2{,}4$ einsetzen in (I)

$2{,}4^2 + v^2 = 4^2 \Rightarrow v^2 = 16 - 5{,}76 = 10{,}24$

$v = \pm 3{,}2$ $+3{,}2$ ist offensichtlich die Lösung

$F(2{,}4 ; 3{,}2)$ 2

4. Halbkreis über $\overline{AC}$



$A_a = \frac{1}{2}\pi a^2$

Halbkreis über $\overline{CD}$

$A_b = \frac{1}{2}\pi b^2$

Halbkreis über $\overline{DB}$

$A_c = \frac{1}{2}\pi c^2$

Halbkreis über $\overline{AB}$ $\quad A_d = \frac{1}{2}\pi (a+b+c)^2$ 1

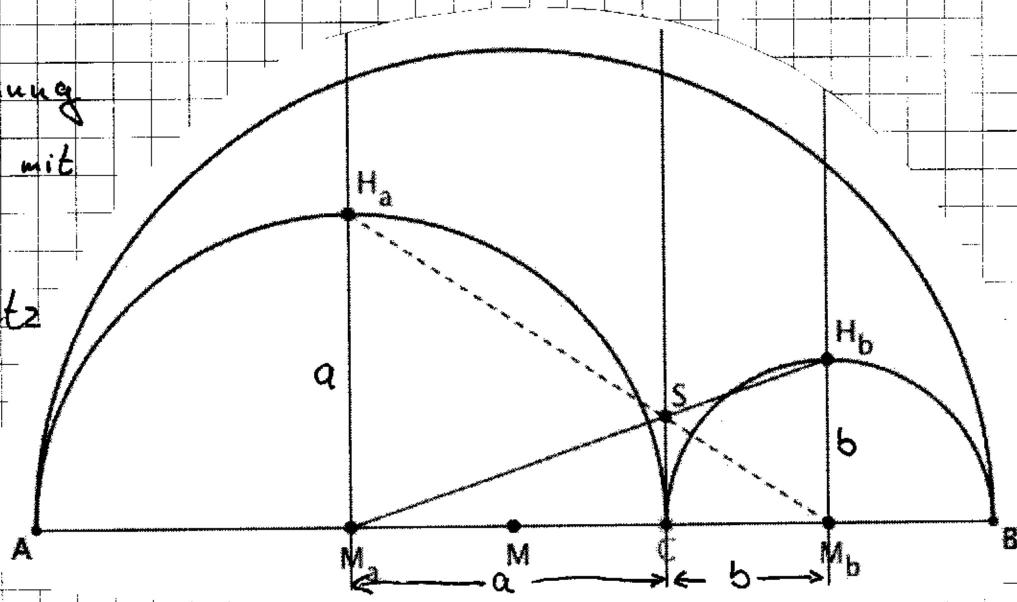
Gesamtfläche: $A = A_d + A_a - A_b + A_c$

$$= \frac{1}{2}\pi \left[(a+b+c)^2 + a^2 - b^2 + c^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\pi \left[a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + a^2 - b^2 + c^2 \right]$$

$$A = \frac{1}{2}\pi\left[2a^2 + 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\right]$$
$$= \pi\left[a^2 + c^2 + ab + ac + bc\right]$$ 2

5. Berechnung von $|CS|$ mit dem 2. Strahlensatz



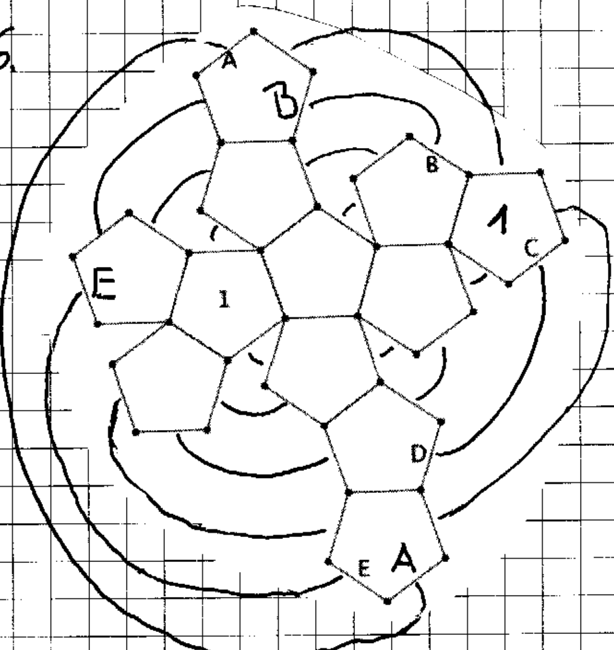
$$\frac{|CS|}{|M_bH_b|} = \frac{|M_aC|}{|M_aM_b|} \Rightarrow \frac{|CS|}{b} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow |CS| = \frac{ab}{a+b}$$ 1

Berechnung von $|CS'|$. Nun ist M_b das Zentrum

$$\frac{|CS'|}{|H_aM_a|} = \frac{|M_bC|}{|M_bM_a|} \Rightarrow \frac{|CS'|}{a} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow |CS'| = \frac{ab}{a+b}$$ 1

S und S' liegen beide auf der Senkrechten durch C und haben von C den gleichen Abstand. Also sind beide Punkte gleich. 1

6.



C und D stoßen zusammen

3

pro Fehler $-\frac{1}{2}$

Auf	2	3	4	5	6	Σ
Pkt	3	4	3	3	3	16