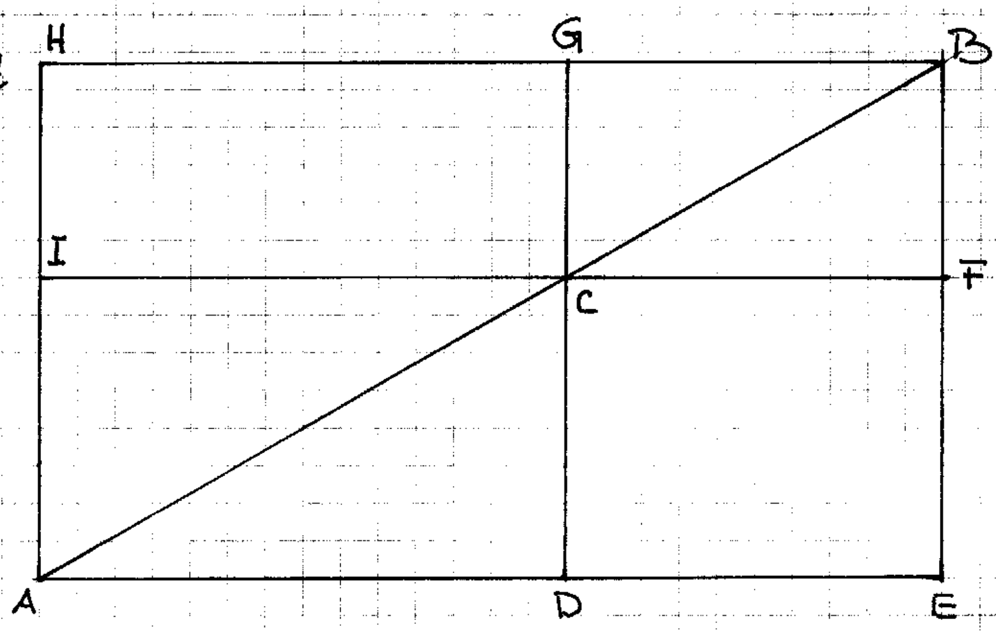
5. Übung Lösungen

PRÄSENZÜBUNGEN

1. Die Diagonale $\overline{AB}$ teilt das Rechteck AEBH in zwei gleich große Dreiecke. Ebenso werden die beiden hellen Rechtecke ADCI und CFBG in flächengleiche Dreiecke geteilt.
Die (grauen) Rechtecke ergeben sich jeweils als Differenz des großen Dreiecks minus die beiden kleineren Dreiecke. Also haben beide den gleichen Flächeninhalt.

a) Man beginnt mit dem Rechteck DEFC, mit $|DE| = 5$ cm $|EF| = 4$ cm. Dann verlängert man



$\overline{DE}$ über D hinaus und zeichnet auf der Verlängerung A mit $|AD| = 7$ cm. Dann zeichnet man B als Schnitt von AC mit EF. Durch entsprechende Parallelen durch F, B, A und D ergänzt man die Figur, so dass das Rechteck CGHI entsteht, welches das gesuchte Rechteck ist.

2 a) Kathetensatz

$a^2 = p \cdot c$ bzw. $b^2 = q \cdot c$

Kathetenquadrat = Hypotenusenabschnitt • Hypotenuse

b) Satz v. Pythagoras

$a^2 + b^2 = c^2$ Kathetenquadrat + Kathetenquardrat = Hypotenusenquadrat

c) Höhensatz

$h^2 = p \cdot q$ Höhenquadrat = Produkt der Hypotenusenabschnitte

d) Die Fläche des Dreiecks kann auf zwei Weisen berechnet werden

$A = \frac{1}{2} c \cdot h = \frac{1}{2} b \cdot a$ (b ist zu a die Höhe und umgekehrt)

e) $b^2 = q \cdot c = 8_{cm} \cdot 12{,}5_{cm} = 100\ cm^2 \Rightarrow \underline{\underline{b = 10 cm}}$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + 100\ cm^2 = 156{,}25\ cm^2$

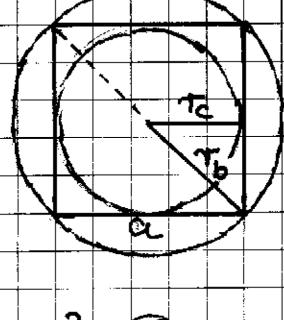
$a^2 = 56{,}25\ cm^2 \Rightarrow \underline{\underline{a = 7{,}5\ cm}}$

$a^2 = p \cdot c \Rightarrow \underline{\underline{p}} = \frac{a^2}{c} = \frac{56{,}25\ cm^2}{12{,}5\ cm} = \underline{\underline{4{,}5\ cm}}$

$h^2 = p \cdot q = 4{,}5\ cm \cdot 8\ cm = 36\ cm^2 \Rightarrow \underline{\underline{h = 6\ cm}}$

HAUSÜBUNGEN

3. a) $U = 4a$ $A = a^2$ 0,5



b) Der Umkreis hat als Radius die halbe Diagonale des Quadrats.

$d = a\sqrt{2} \Rightarrow r_b = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ 1

$\Rightarrow U_b = 2\pi r_b = \pi a \sqrt{2} \approx 4{,}44\ a$

$A_b = \pi r_b^2 = \pi \cdot \frac{1}{4} a^2 2 = \frac{1}{2} \pi a^2 \approx 1{,}57\ a^2$ 1

3 c) Der Inkreis hat als Radius die halbe Quadratkante. $r_c = \frac{a}{2}$ 0,5

$\Rightarrow U_c = 2\pi r_c = 2\pi \frac{a}{2} = \pi a \approx 3{,}14\, a$

$\Rightarrow A_c = \pi r_c^2 = \pi \frac{a^2}{4} = \frac{\pi}{4} a^2 \approx 0{,}785\, a^2$ 1

d) Umfang $U_d = 2\pi r_d = 4a \Rightarrow r_d = \frac{2}{\pi} a \approx 0{,}637\, a$ 1

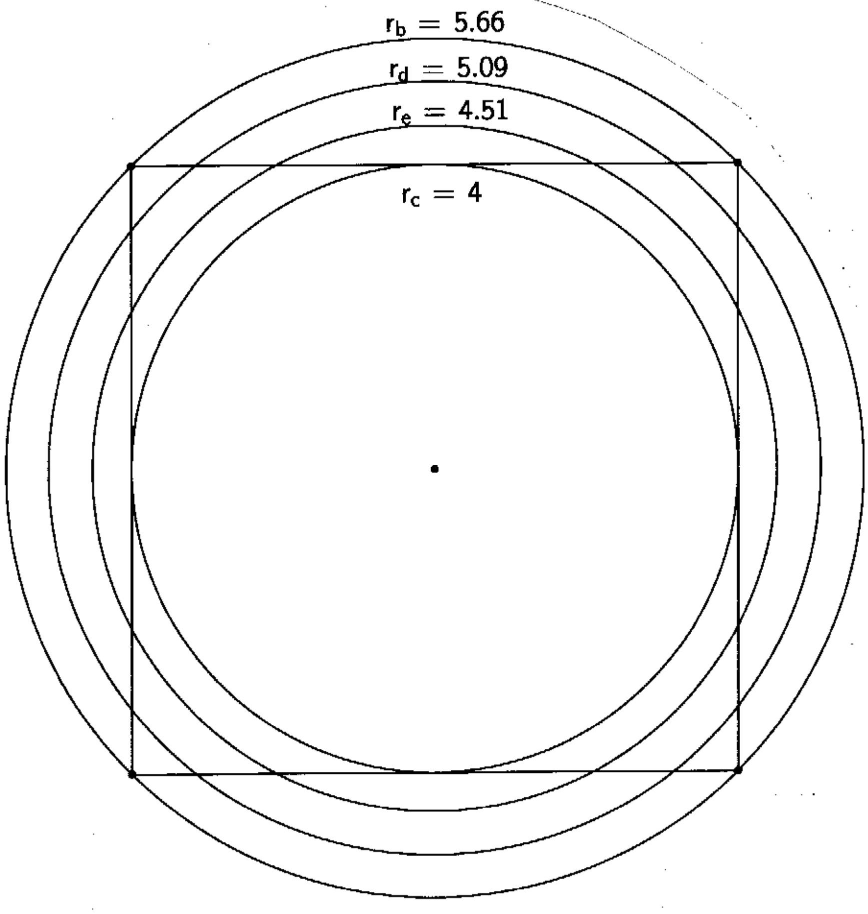
$A_d = \pi r_d^2 = \pi \frac{4}{\pi^2} a^2 = \frac{4}{\pi} a^2 \approx 1{,}27\, a^2$ 1

e) Fläche $A_e = \pi r_e^2 = a^2 \Rightarrow r_e = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\, a \approx 0{,}564\, a$ 1

$U_e = 2\pi r_e = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\pi}}\, a = 2\sqrt{\pi}\, a \approx 3{,}54\, a$ 1

Zusammenfassender Vergleich

Inkreis < flächengl. Kreis < umfanggl. Kreis < Umkreis



2

4. a. Strahlensatzfigur

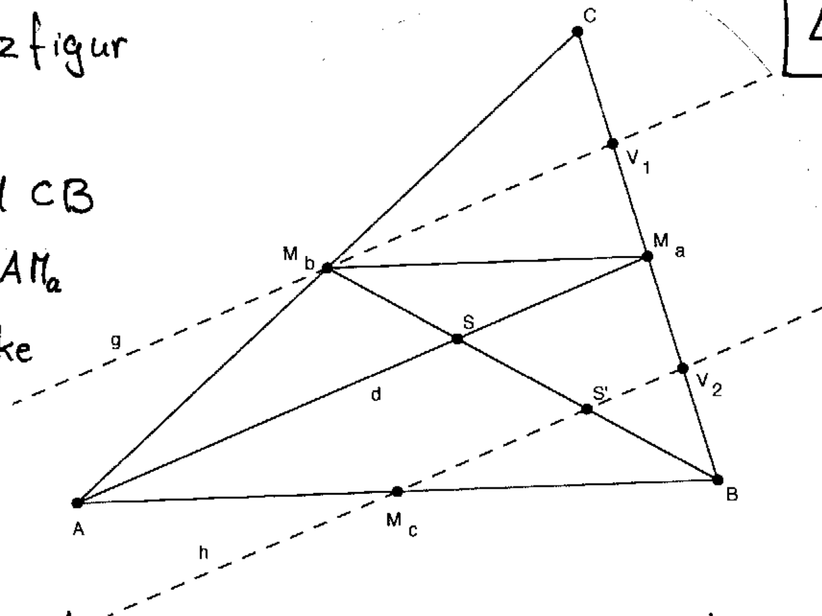
Zentrum C,

Strahlen CA und CB

Parallelen g und AM_a

Da M_b die Strecke $\overline{CA}$ halbiert,

halbiert V_1 die Strecke $\overline{CM_a}$.



Also ist $|CV_1| = \frac{1}{4}|CB|$ (die Hälfte der Hälfte) 1,5

b. Strahlensatzfigur mit Zentrum B,

Strahlen BA und BC, Parallelen h und AM_a

M_c halbiert $\overline{BA}$, also auch V_2 die Strecke $\overline{BM_a}$.

Also ist $|BV_2| = \frac{1}{4}|CB|$ 1,5

c. Strahlensatzfigur mit Zentrum B

Strahlen BM_b und BC, Parallelen h und g

Aus a. und b. folgt $|BV_2| = |V_2 M_a| = |M_a V_1| = |V_1 C|$

$= \frac{1}{4}|BC|$. Also ist $\frac{|BV_2|}{|BV_1|} = \frac{1}{3} = \underbrace{\frac{|BS'|}{|BM_b|}}$, $|\cdot|BM_b|$

$\Rightarrow |BS'| = \frac{1}{3}|BM_b|$ Q.E.D. 2

5.

a. Jeder Kreisbogen ist ein Sechstel Kreis mit dem Radius a.

$B = \frac{1}{6} \cdot 2\pi a = \frac{1}{3}\pi a$ $\underline{\underline{U}} = 3B = \underline{\underline{\pi a}}$ 1

b. Das Flächenstück ⌓ ist ein Sechstel (wegen $60° = 360° : 6$) der Kreisfläche mit dem Radius a.

5

(5b) $A_{\triangle} = \frac{1}{6}\pi a^2$. Legt man drei davon, immer um 120° gedreht, übereinander, so ist die Fläche des Bogendreiecks abgedeckt. Dabei wird die Fläche des Dreiecks dreifach gezählt. Also

$$A = 3 \cdot A_{\triangle} - 2 A_{\Delta} = 3 \cdot \frac{1}{6}\pi a^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\, a^2}}$$ 2

c. $a = 5\,cm$ $U = \pi \cdot 5\,cm \approx 15{,}7\,cm$

Beurteilung: Der Umfang des Dreiecks wäre $3 \cdot 5\,cm = 15\,cm$. Die Bögen sind ein wenig länger als die Strecken. Also scheint $\pi \cdot a$ richtig zu sein. 1

$$A = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\, a^2 = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3}) \cdot 5^2\, cm^2$$
$$\approx 0{,}701 \cdot 25\,cm^2 \approx 17{,}6\,cm^2$$

Beurteilung: Das Bogendreieck ist deutlich kleiner als das Quadrat über der Kante a ($a^2 = 25\,cm^2$), aber mehr als die Hälfte ($12{,}5\,cm^2$). Somit scheint $17{,}6\,cm^2 \approx \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\, a^2$ richtig zu sein. 1

6 a. 1 - 3   2 - 4   6 - 9   7 - 8   5 - 10 1

b. A - D   B - E   C - H   F - G 1

3	4	5	6	Σ
10	5	5	2	22