4. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNGEN

1.

$$\cancel{x=}\quad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

hier steht wieder x

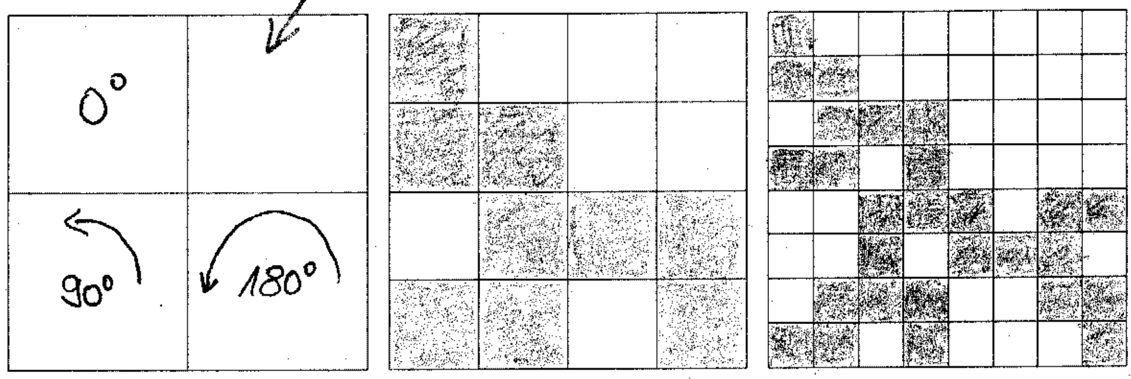
also $x = 1 + \dfrac{1}{2+\frac{1}{x}} = 1 + \dfrac{1}{\frac{2x+1}{x}} = 1 + \dfrac{x}{2x+1} \quad | \cdot (2x+1)$

$$x(2x+1) = 2x+1+x$$
$$2x^2 \cancel{+x} = 2x+1\cancel{+x} \quad | : 2$$
$$x^2 = x + \tfrac{1}{2} \quad | \text{ordnen}$$
$$x^2 - x - \tfrac{1}{2} = 0$$
$$x = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Für das Minuszeichen ergibt sich für x eine negative Zahl, was offensichtlich keine Lösung ist.

also $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1{,}366$

2. Dem Bild entnimmt man



2. Stufe 3. Stufe

3. a. selbstähnlich, jeder Faktor der Form $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist geeignet
Beispiel: $\frac{1}{3}$ ergibt $\{\frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}, \dots\}$ 1

b. selbstähnlich, jeder Faktor der Form 2^n, $n \in \mathbb{N}$ ist geeignet
Beispiel: $2^2 = 4$ ergibt $\{8, 16, 32, 64, \dots\}$ 1

c. nicht selbstähnlich
solch einen Faktor k kann es nicht geben
Ann. 1: $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 1$ Dann ist für jede Primzahl p das Produkt $k \cdot p$ keine Primzahl
Ann. 2: k Bruch (rationale Zahl) $= \frac{z}{n}$, $n \geq 2$
$p \cdot \frac{z}{n}$ ist eine natürliche Zahl nur dann, wenn $n = p$. Also kann es keinen gemeinsamen Faktor für alle Primzahlen geben.
Ann. 3: k irrational. Dann ist $k \cdot p$ auch irrational, ~~also~~ und keine natürliche Zahl. 2

d. selbstähnlich, jeder Faktor der Form $\frac{1}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$ ist geeignet
Beispiel: $\frac{1}{10}$ aus $0,\underbrace{xxxxxx\dots}_{0 \text{ oder } 3}$ wird $0,0\underbrace{xxxxx}_{0 \text{ oder } 3}$ 1

e. selbstähnlich, jeder Faktor der Form n^2, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ ist geeignet, denn Quadratzahl · Quadratzahl = Quadratzahl
$$m^2 \cdot n^2 = (n \cdot m)^2$$ 1

f. selbstähnlich

systematische Suche nach einem Faktor

Die Zahlen der Menge M haben die Gestalt

$n \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + e \quad$ mit $n \in \mathbb{N}_0 \quad e \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Gesucht wird eine natürliche Zahl $s \neq 1$, für die jedes Element aus M nach Multiplikation mit s wieder in M liegt

Ansatz $\quad s = m \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b \quad$ mit $m \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \{0, 1, \dots, 9\}$

$(n \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + e) \cdot (m \cdot 10^2 + a \cdot 10 + b)$

$= nm \cdot 10^4 + na \cdot 10^3 + nb \cdot 10^2 + 2m \cdot 10^3 + 2a \cdot 10^2 + 2b \cdot 10$

$\quad + em \cdot 10^2 + ea \cdot 10 + eb$

Zusammenfassen nach den Zehnerpotenzen

$= 10^2 (mn \cdot 100 + na \cdot 10 + nb + 20m + 2a + em)$

$+ 10\,(2b + ea) + eb$

Damit dieses Ergebnis wieder in M liegt, ~~muss gelten~~ ist eine Bedingung

$\quad 2b + ea = 2 \quad$ mit $e, a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ und $eb < 10$

Für beliebiges e muss $a = 0$ sein.

$\Rightarrow b = 1$

Also hat s die Form $\quad s = m \cdot 10^2 + 1 \quad$ mit $m \in \mathbb{N}$

($m = 0$ geht nicht, da sonst $s = 1$ ist)

101 ist der kleinste Faktor s für eine Selbstähnlichk.

4. $x = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}$ — x also $x = 1 + \frac{1}{x} \quad | \cdot x$

$x^2 = x + 1$ ①

(Für Kundige: das ist die Definitionsgleichung für ϕ „goldene Verlängerung")

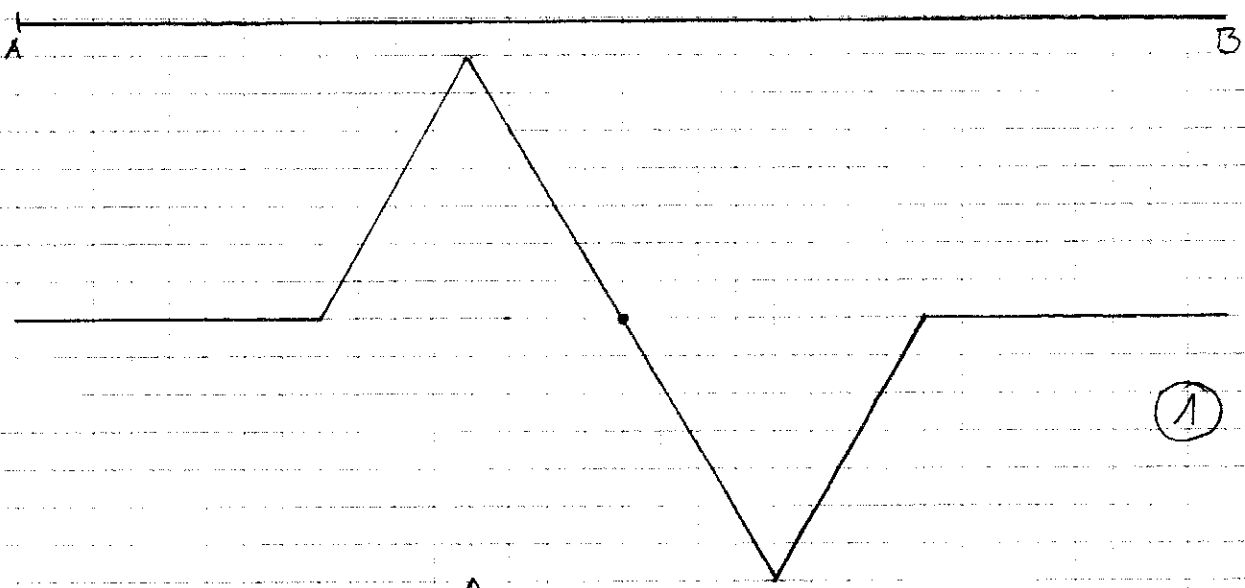
$x^2 - x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Mit dem ~~für das~~ Minuszeichen erhält man eine negative Zahl, was sicher keine Lösung für x ist.

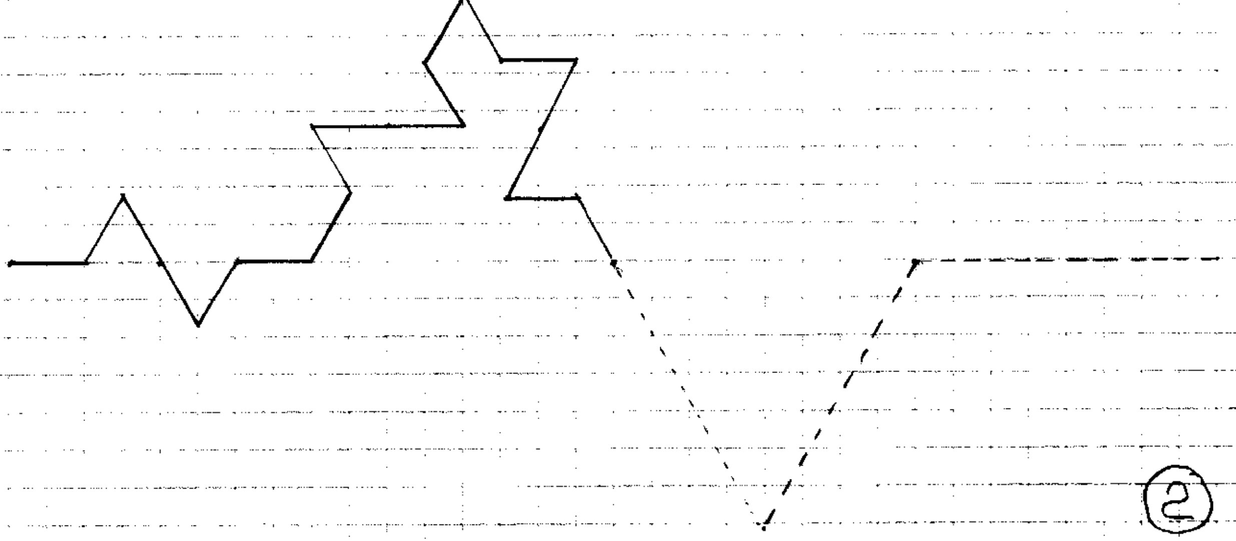
Also $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$
$= \phi$ ①

5. a



①

b.



②

5

5c. Die Grenzfigur ist exakt selbstähnlich.
Die Gesamtfigur muss mit $s = \frac{1}{4}$ verkleinert werden. Man benötigt dann $n = 6$ dieser Teile, um die Gesamtfigur zusammenzusetzen.

Also $D = \frac{\log 6}{\log 4} \approx 1{,}292$ 1

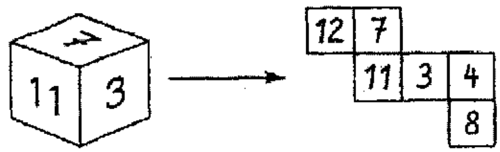
6.

ZAHLEN WERKSTATT

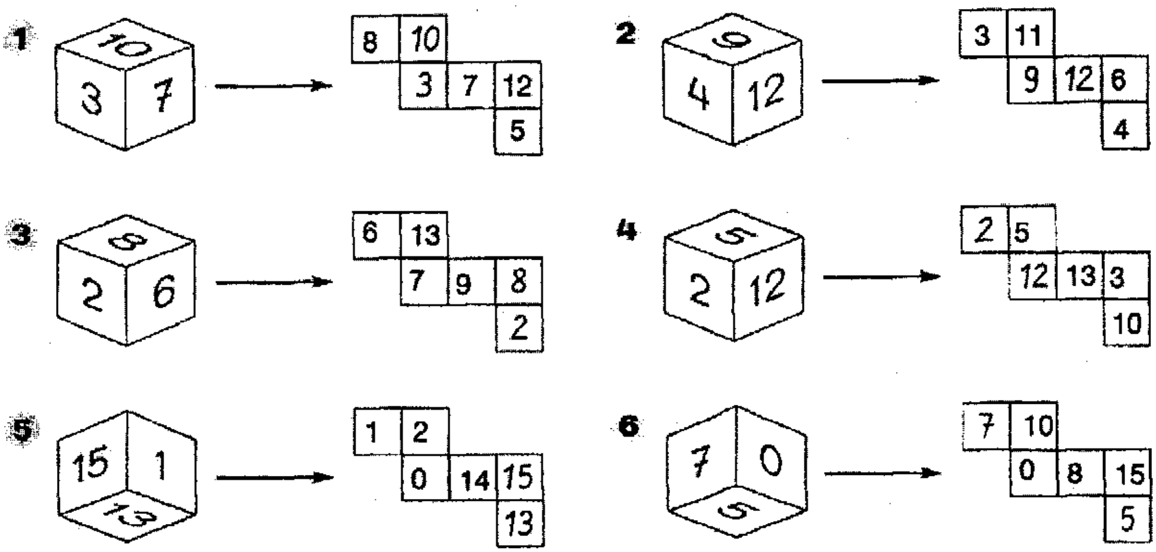
Geometrie 34a

Würfelaugen

Die Summe der Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten ist immer 15.



Trage die richtigen Zahlen an der richtigen Stelle in das Netz ein.



3

3	4	5	6	Σ
8	2	4	3	17