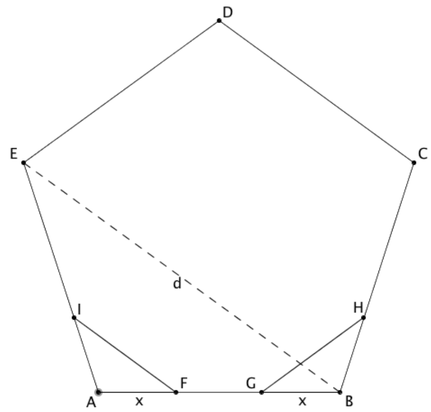
9. Übung
Parkettierung, Polyeder

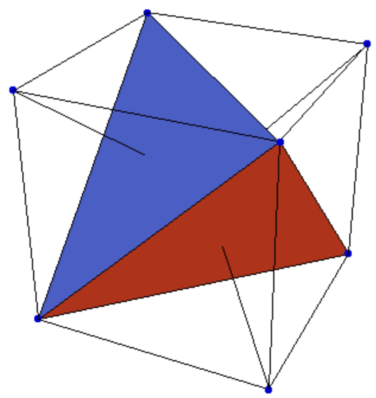
Präsenzübungen (für Di, 17.12.)

1. Geometrische Beziehungen
   Ein regelmäßiges Fünfeck ABCDE soll durch Abschneiden der Ecken in ein regelmäßiges Zehneck verwandelt werden.
   In der Zeichnung rechts sind die Schnittkanten IF und GH schon eingezeichnet. Wie lang muss x sein?



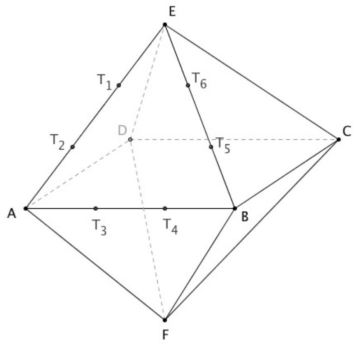
Hausübungen (Abgabe: Do, 19.12.)

2. Volumen eines Tetraeders
   Ein Tetraeder lässt sich wie dargestellt in einen Würfel einpassen. *(Die Linien von den Ecken auf die Tetraederflächen sind Abschnitte der Raumdiagonalen, für die Aufgabe hier aber unerheblich).*
   Für die Berechnungen wollen wir die Kantenlänge des Würfels w nennen, die Kantenlänge des Tetraeders t.



   a. Begründen Sie, dass hier tatsächlich ein Tetraeder in dem Würfel liegt, da alle Kanten (des Tetraeders) gleich lang sind.
   b. Welcher mathematische Zusammenhang besteht zwischen w und t? Schreiben Sie eine Gleichung auf.
   c. Der Tetraeder füllt natürlich das Volumen des Würfels nicht aus. Wie viele dieser Lücken zwischen Tetraeder und Würfelaußenwand gibt es? *(Aus Symmetriegründen sind diese kongruent zueinander.)*
   d. Berechnen Sie das Volumen einer Lücke.
      (Es ist eine Pyramide, Volumen = Grundfläche · Höhe : 3 . Für Grundfläche und Höhe können Sie eine geschickte oder eine sehr ungeschickte Wahl treffen.)
   e. Berechnen Sie auf der Basis der bisherigen Rechnungen das Volumen des Tetraeders.
   f. In Formelsammlungen findet man für das Tetraedervolumen $V = \frac{1}{12}a^3\sqrt{2}$, wobei a die Kantenlänge des Tetraeders ist. Vergleichen Sie das mit Ihrem Ergebnis. Sie haben mit hoher Wahrscheinlichkeit nicht dieses Ergebnis. Erläutern Sie den Unterschied und leiten Sie die Formel mit Aufg. b. her.

3. Abschneiden eines Oktaeders
Die Abbildung rechts zeigt ein Oktaeder, von dem die Ecken abgeschnitten werden sollen. Für die Schnittlinien sind einige Kanten bereits in Drittel eingeteilt (Punkte T1 bis T6).
(*Drucken Sie das Arbeitsblatt mit der großen Abbildung aus und machen Sie alle Zeichnungen auf diesem Arbeitsblatt.*)



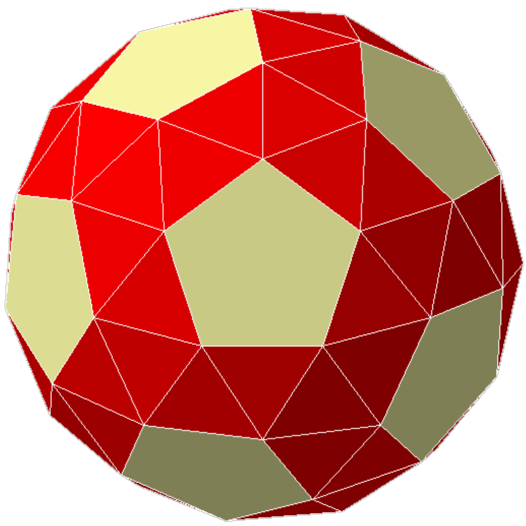
a. Zeichnen Sie das Sechseck $T_1T_2T_3T_4T_5T_6$.
b. Begründen Sie, dass das Sechseck ein regelmäßiges ist.
c. „Schneiden“ Sie nun in der Zeichnung alle Ecken ab. Färben Sie die sichtbaren Flächen und verwenden Sie für die Quadrate und Sechsecke unterschiedliche Farben.
d. Angenommen, die Kantenlänge des Oktaeders ist 1. Berechnen Sie dann die Oberfläche des neu entstandenen Körpers. (Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kante *a* ist $A_\Delta = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$).

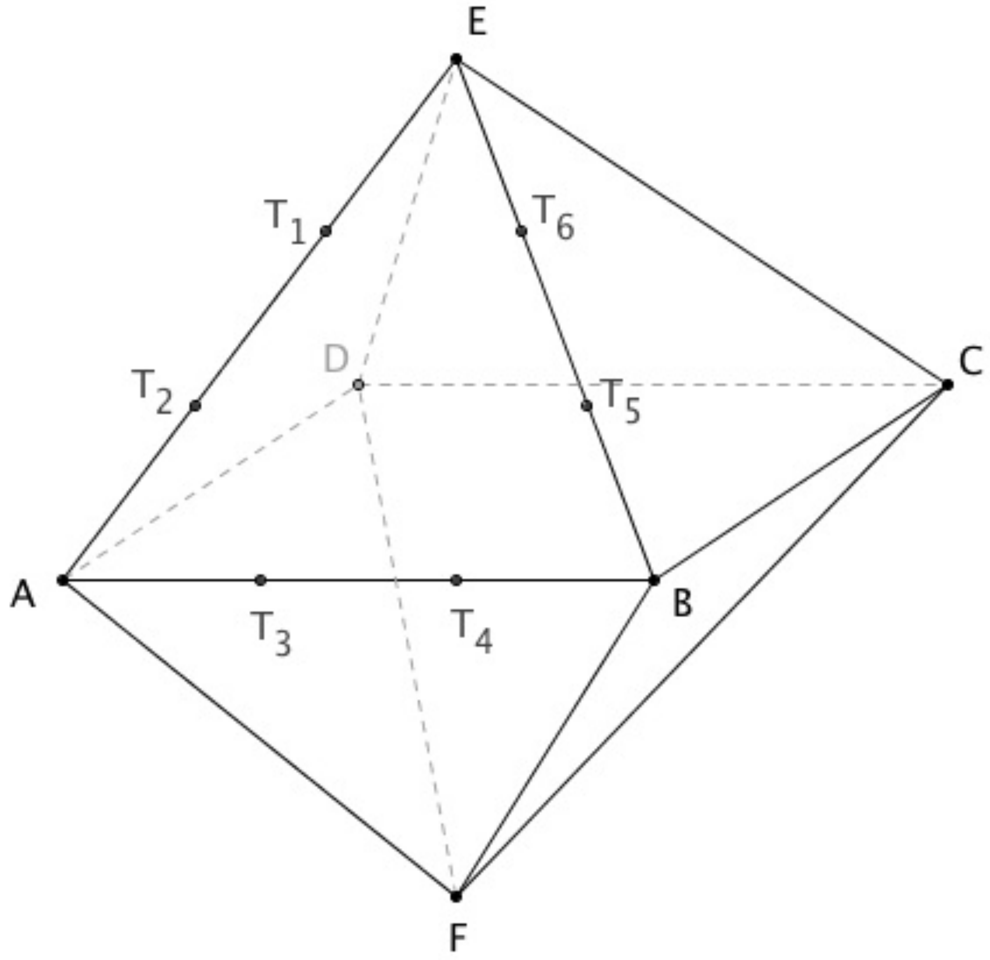
4. Wenn bei einem Polyeder (egal ob regelmäßig oder unregelmäßig) in jeder Ecke immer drei Kanten zusammenstoßen, so gilt für die Eckenzahl *E* und die Kantenzahl *K* die Gleichung $K = \frac{3}{2}E$.
a. Begründen Sie das.
b. Überprüfen Sie diese Gesetzmäßigkeit am abgeschnitten Oktaeder aus Aufgabe 3.

Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren

5. Das Bild zeigt einen Archimedischen Körper, das sog. Snub-Dodekaeder. Er hat zwölf Fünfecke.
a. Wie viele Dreiecke hat der Körper?
b. Wie viele Ecken und Kanten hat der Körper?
Erläutern Sie jeweils, wie Sie zählen.
c. Überprüfen Sie die Eulersche Polyederformel.




E
T1
T6
D
C
T2
T5
A
B
T3
T4
F