Dr. Reimund Albers Wintersemester 2013/14

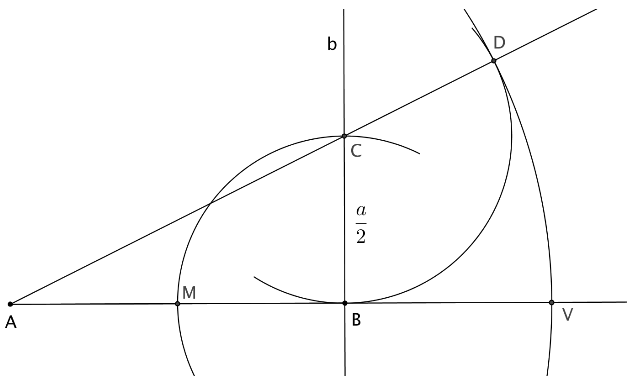
Mathematisches Denken und Lehren 1

4. Übung
Goldener Schnitt, Fibonacci-Zahlen

Präsenzübungen (für Di, 12.11.)

1. Rechenspielchen
Nehmen Sie eine natürliche Zahl und ziehen Sie davon ganzzahlige Vielfache von φ ab. Versuchen Sie, möglichst dicht an Null zu kommen.
Beispiel: Ausgangszahl 10. Rechnet man $10-16\varphi \approx 0.1115$, liegt man noch über Null, mit $10-17\varphi \approx -0.5066$ unter Null.
Bei welchen Zahlenkombinationen kommt man der Null besonders nahe?

2. Die Abbildung zeigt die klassische Konstruktion der Goldenen Verlängerung.
Gegeben ist die Ausgangsstrecke $\overline{AB}$ mit der Länge a. $\overline{AV}$ ist dann die Goldene Verlängerung dazu.
Erläutern Sie die Konstruktion und zeigen Sie, dass $\left|\overline{AV}\right| = \frac{\sqrt{5}+1}{2}a$ ist.



Hausübungen (Abgabe: Do, 14.11.)

3. Man kann Variablen mit Indizes ganz unterschiedlich schreiben. Jede Schreibweise hat ihre Bedeutung, daher muss man sehr sauber und deutlich schreiben.
$f_n^2-3 \qquad f_{n-3}^2 \qquad f_{n^2-3} \qquad f_{n^2}-3 \qquad f_{n-3^2} \qquad f_{(n-3)^2}$
Setzen Sie jeweils n = 4 ein und bestimmen Sie dann das Ergebnis, wobei mit f_n die n-te Fibonacci-Zahl gemeint ist. In einem Fall bekommen sie eine Rechnung, mit der Sie die Fibonacci-Zahl nicht bestimmen können.

4. Zeichnen Sie eine Strecke $\overline{AB}$ der Länge 16 cm.
   a. Zeichnen Sie den Punkt T_1 ein, der die Strecke $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt teilt. *(Rechnen Sie mit $\varphi \approx 0{,}618$ und messen Sie die notwendige Länge mit dem Geodreieck ab. Es ist keine Konstruktion mit Zirkel und Lineal verlangt.)*
   b. Zeichnen Sie den Punkt T_2 ein, der die Strecke $\overline{AT_1}$ im goldenen Schnitt teilt. *(Arbeiten Sie dazu analog wie in a.)*
   c. Teilt T_1 die Strecke $\overline{T_2B}$ im goldenen Schnitt? *(Sie können hier messen und mit dem Taschenrechner rechnen – das ist die weniger mathematische Lösung, die weniger Punkte*

bringt, oder mathematisch mit φ rechnen – das ist die anspruchsvollere Lösung, die mehr Punkte bringt.)

d. Zeichnen Sie den Punkt T_3 ein, der die Strecke $\overline{T_1B}$ im goldenen Schnitt teilt. *(Arbeiten Sie dazu analog wie in a.)*

e. Sie haben auf der Gesamtstrecke $\overline{AB}$ nun die Teilstrecken $\overline{AT_2}$, $\overline{T_2T_1}$, $\overline{T_1T_3}$ und $\overline{T_3B}$. Geben Sie deren Länge als Teil der Länge von $\overline{AB}$ an. Verwenden Sie dabei so weit wie möglich φ. *(Beispiel für eine Strecke, nach der hier nicht gefragt ist: $|T_1B| \approx 0{,}382 \cdot |AB|$. Das ist richtig, aber nicht sehr erhellend. $|T_1B| = \varphi^2 \cdot |AB|$ ist da sehr viel aussagekräftiger.)*

5. Ein 1,62 m großer Maler malt auf eine vollkommen weiße Fläche mit den Maßen 3,44 m (Breite) x 2,16 m (Höhe) einen kreisrunden, schwarzen Fleck mit dem <u>Radius</u> 1,618 cm (Durchmesser 3,236 cm). Dieser soll die Schönheit an sich demonstrieren. Daher ist der schwarze Fleck auch so auf der weißen Fläche angeordnet, dass er (genauer sein Mittelpunkt) die Breite und die Höhe im Goldenen Schnitt teilt. (Für die Breite ist der Major links, für die Höhe ist der Major oben.) Aus Bequemlichkeitsgründen unterteilt er beide Abmessungen aber tatsächlich mit 5 Achtel zu 3 Achtel.
   a. Zeichnen Sie das Bild im Maßstab 1:20 auf und markieren sie dort sowohl den tatsächlichen Punkt wie auch seine theoretisch exakte Lage (bei genauer Teilung im Goldenen Schnitt, es reicht, mit $\varphi \approx 0{,}618$ zu rechnen).
   b. Zeichnen Sie in Originalgröße den praktisch gemalten Fleck (Einteilung 5:3) und den theoretisch zu malenden Fleck (Einteilung mit φ) in ihrer Lage zueinander.

6. Kettenbruchentwicklung zu φ
   Für die Goldene Verlängerung gibt es eine sehr schöne, regelmäßige, allerdings unendliche Darstellung. So etwas nennt man einen Kettenbruch.
   Für diesen Ausdruck erhält man Näherungen, wenn man die unendliche Fortsetzung abbricht. Dazu lässt man die Entwicklung nach einem Plus dann einfach weg.

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

$$\Phi_1 = 1 + \frac{1}{1} \quad \Phi_2 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} \quad \Phi_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} \quad \Phi_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}$$

   a. Berechnen Sie die vier Näherungszahlen als Brüche. Was fällt Ihnen dabei auf. Welche Erkenntnis aus der Vorlesung/dem Skript sichert Ihnen, dass die unendliche Fortsetzung tatsächlich die Goldene Verlängerung ergibt.
   b. Zeigen Sie durch eine Rechnung, dass die unendliche Fortsetzung des Kettenbruchs genau die Goldene Verlängerung ergibt. *(Hinweis: Nutzen Sie aus, dass unter dem ersten Bruchstrich (graue Fläche) genau das Gleiche steht wie auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens.)*

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$