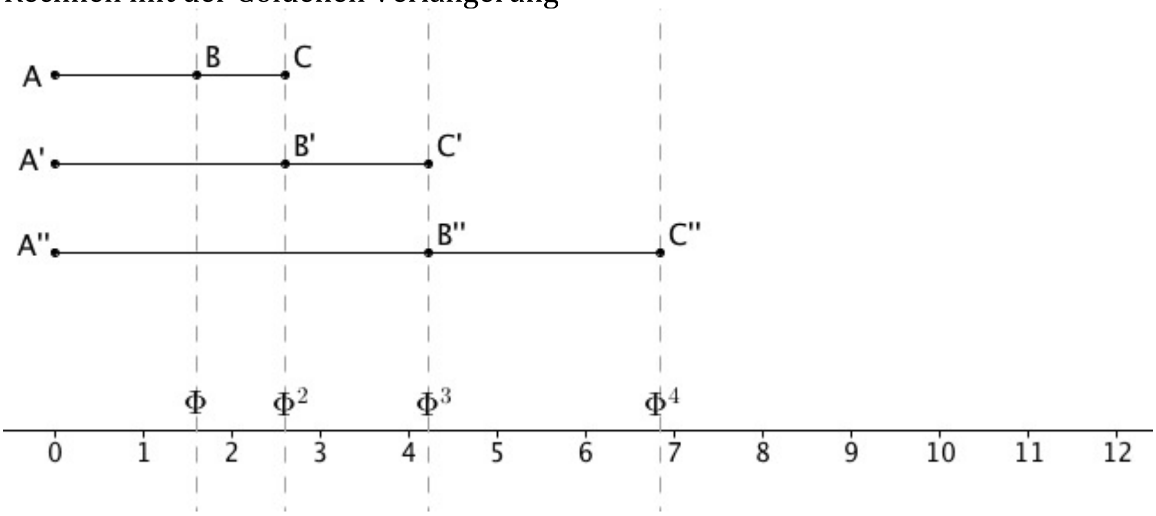
3. Übung
Goldener Schnitt

Präsenzübungen (für Di, 5.11.)

1. Logik
   Bilden Sie zur Implikation
   „Wenn Sie über 25 sind und einen gültigen Führerschein haben, dann können Sie dieses Auto mieten.“
   - die „nicht-oder“-Form
   - die Kontraposition
   - die Verneinung.
     Beurteilen Sie (mit etwas Sprachgefühl), ob die entstehenden Sätze das ausrücken, was nach logischen Gesetzen gilt (äquivalente Aussage, Verneinung).

2. Rechnen mit der Goldenen Verlängerung



Ausgangsobjekt ist die Strecke $\overline{AB}$ mit A bei 0 und B bei Φ, die um den Faktor Φ verlängert wurde zu $\overline{AC}$. Folglich liegt C bei Φ^2.
Von ABC zu A’B’C’ wurden alle x-Koordinaten (und nur um die geht es) um Φ verlängert. Ebenso von A’B’C’ zu A“B“C“.

a. Wie setzt sich Φ^2 zusammen (definierende Gleichung)?Wie lang ist also $\overline{BC}$?

b. Wie lang ist $\overline{B'C'}$? Wie setzt sich also Φ^3 zusammen? Verwenden Sie nur Φ und 1.

c. Wie lang ist $\overline{B''C''}$? Wie setzt sich also Φ^4 zusammen? Verwenden Sie nur Φ und 1.

d. Fahren Sie fort. Erkennen Sie eine Regelmäßigkeit? Geben Sie eine Formel für Φ^n an als additive Zusammensetzung aus Φ und 1.

Hausübungen (Abgabe: Do, 7.11.)

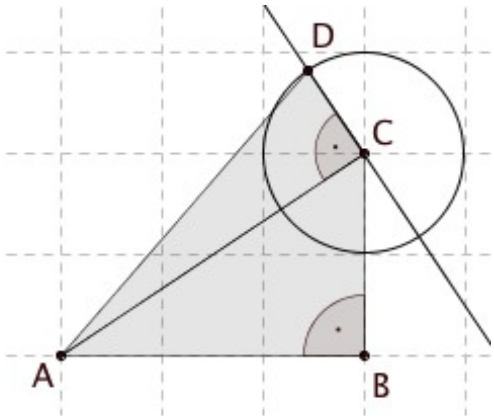
3. *(Vorbereitung auf die kommende Vorlesung)* Sie kennen die Binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Nun kann man den Exponenten erhöhen, so dass man $(a+b)^3$ betrachtet.

   a. Berechnen Sie $(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a+b)$, indem Sie nun mit dem Distributivgesetz weiterarbeiten und das Ergebnis zusammenfassen.

   b. Berechnen Sie ebenso $(a+b)^4$.
   (Das Ergebnis kennen Sie ja bereits aus einer früheren Aufgabe.)

   c. Berechnen Sie ebenso $(a+b)^5$.

4. Die Abbildung zeigt das rechtwinklige Dreieck ABC. Das im Hintergrund liegende Quadratgitter gibt die Länge 1 vor. Also ist $|AB| = 3$ und $|BC| = 2$. In C ist eine Senkrechte zur Geraden AC gezeichnet. Der Kreis um C mit dem Radius 1 schneidet diese in D.



   a. Wie lang ist die Strecke $\overline{AC}$?

   b. Wie lang ist die Strecke $\overline{AD}$?

   c. Konstruieren Sie entsprechend der gerade analysierten Zeichnung eine Strecke der Länge $\sqrt{21}$.

   d. Wie sieht die Konstruktion zu $\sqrt{23}$ aus, wenn Sie die Zerlegung $23 = 3^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2$ verwenden?

5. Der silberne Schnitt
   Um unseren Weg zum goldenen Schnitt noch einmal nachzuvollziehen, erfinde ich hier jetzt zu Übungszwecken den „Silbernen Schnitt".
   Eine Strecke wird beim „Silbernen Schnitt" in zwei verschieden große Teile geteilt. Dabei heißt der größere Teil der „Dicke", und der kleinere Teil der „Dünne". Für den „Silbernen Schnitt" gilt dann die Definition:
   Das Verhältnis des „Dicken" zur Gesamtstrecke ist doppelt so groß wie das Verhältnis des „Dünnen" zum „Dicken".

   a. Machen Sie eine Zeichnung, führen Sie Buchstaben für die Längen ein und schreiben Sie dann die Definition als mathematische Gleichung.

   b. Beschränken Sie die Gleichung aus a. auf eine Unbekannte, nämlich die des „Dicken" und lösen Sie dann die Gleichung. *(Wenn Sie hier für den „Dicken" $\frac{1}{2}$ als Lösung bekommen, haben Sie beim Ansatz in a. einen entscheidenden Denkfehler gemacht. Der „Dicke" ist* ***nicht*** *$\frac{1}{2}$! Dann wären die beiden Teile ja auch nicht verschieden groß.)*

   c. Konstruieren Sie nun auf der Basis des Ergebnisses in b. geometrisch die Teilung einer Strecke im „Silbernen Schnitt". Beschreiben Sie die einzelnen Konstruktionsschritte. (*Für die Konstruktion der Wurzel ist es günstig, auf die Aufgabe 4* *zurückzugreifen.*)

6. Konstruktion des goldenen Schnitts

   Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$, die im goldenen Schnitt geteilt werden soll. In der Konstruktion rechts wurden die Objekte (ohne die Kreislinien) in alphabetischer Reihenfolge konstruiert. Erläuterungen:
   c ist senkrecht zu AB

   E ist der Mittelpunkt von $\overline{AD}$

   G ist der Punkt, der $\overline{AB}$ im Goldenen Schnitt teilt.

   a. Beschreiben Sie in der korrekten Reihenfolge, welche Kreise (Angabe von Mittelpunkt und Radius) gezeichnet werden.
      Nennen Sie dazu $\left|AB\right| = a$.

   b. Begründen Sie, warum die Konstruktion richtig ist.