



2. Übung

Mathematische Grundfertigkeiten, Fibonacci-Zahlen

Präsenzübungen (für Mo/Di, 28./29. 10.)

1. Termumformungen

In der Formel von Binet für die Fibonacci-Zahlen $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$

muss man Potenzen von $(1+\sqrt{5})$ ausrechnen.

Machen Sie das konkret für $(1+\sqrt{5})^4$, wobei Sie die Binomische Formel

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ verwenden sollen, um ein exaktes Ergebnis zu erhalten und keine dezimale Näherungszahl). Am Ende bekommen Sie einen Zahlterm der Form $K_1 + K_2\sqrt{5}$ heraus. Wie lauten K_1 und K_2 ?

2. Termumformungen mit dem goldenen Schnitt

Für den goldenen Schnitt gilt: $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Zeigen Sie dafür

a. $\varphi^2 + \varphi = 1$

b. $\frac{1}{\varphi} = 1 + \varphi$ Zeigen Sie diese Gleichung

- durch Einsetzen und Nachrechnen
- durch Umformung aus der Gleichung a.

c. $\varphi^3 = 2\varphi - 1$ Zeigen Sie diese Gleichung

- durch Näherungszahlen auf dem Taschenrechner
- durch Umformung aus der Gleichung a.

Hausübungen (Abgabe: Do, 31.10.)

3. (siehe Übung 1, Aufg. 1b) Folgende Umformung war der Lösungsweg einer Studentin in der Klausur:

$$\frac{1}{3}n(n+1)(n-1) + (n+1)^2 - (n+1) \quad (1)$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n-1) + (n+1)(n+1-1) \quad (2)$$

$$= n(n+1) \left[\frac{1}{3}(n-1) + 1 \right] \quad (3)$$

$$= n(n+1) \left[\frac{1}{3}n - \frac{1}{3} + \frac{3}{3} \right] \quad (4)$$

$$= n(n+1) \left[\frac{1}{3}n + \frac{2}{3} \right] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \quad (6)$$

Erläutern Sie diese Umformung Schritt für Schritt.

4. Zahlenketten

Unter dem Stichwort „Zahlenketten“ findet das Prinzip der Fibonacci-Zahlen Eingang in die Übungsaufgaben der Grundschule. (Googeln Sie einmal nach: Zahlenketten Grundschule)

4 5 9 14 23 37 ist z.B. eine 6er-Zahlenkette, die mit 4 und 5 beginnt und mit 37 endet.

- Wie verändert sich die letzte Zahl der 6er-Zahlenkette, wenn man die erste Zahl um 1 vergrößert oder verkleinert? (*Experimentieren Sie ganz konkret.*)
 - Wie verändert sich die letzte Zahl der 6er-Zahlenkette, wenn man die zweite Zahl um 1 vergrößert oder verkleinert? (*Experimentieren Sie ganz konkret.*)
 - 5 13 18 31 49 80 ist eine Zahlenkette, die mit 80 endet. Leiten Sie durch systematisches Probieren auf der Basis von a. und b. eine weitere Lösung her für eine 6er-Zahlenkette, die mit 80 endet. Erläutern Sie die Systematik Ihres Probierens.
 - Finden Sie alle natürlichen Zahlen als Startzahlen, bei denen die 6er-Zahlenkette mit 80 endet. Begründen Sie, warum es keine weiteren Lösungen geben kann.
 - Finden Sie alle ganzen Zahlen als Startzahlen, bei denen die 6er-Zahlenkette mit 80 endet. Begründen Sie, warum es keine weiteren Lösungen geben kann.
 - Finden Sie zwei nicht ganze Zahlen als Startzahlen, bei denen die 6er-Zahlenkette mit 80 endet.
5. Im Skript zu den Fibonacci-Zahlen wird auf Seite 5/6 die Summenformel $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$ dargestellt und mit Abbildungen erläutert. Dabei fehlt die Abbildung zu $n = 4$.
- Lesen Sie diesen Abschnitt im Skript.
 - Machen Sie die Abbildung zu $n = 4$.

- c. Am Ende des Aufgabenblattes finden Sie eine Abbildung zum allgemeinen Fall. Scheiden Sie die Abbildung aus, kleben Sie sie auf Ihr Arbeitsblatt und ergänzen Sie die Beschriftung in den beiden noch unbeschrifteten Quadraten und die Kantenlängen des Rechtecks.
6. Im Skript zu den Fibonacci-Zahlen wird auf Seite 7 eine allgemeine Formel vorgestellt.
- Konkretisieren Sie die Formel auf $m = 3$. Schreiben Sie die konkreten Fibonacci-Zahlen als Zahl hin.
 - Beweisen Sie die so gefundene Formel für f_{n+3} .
7. Mathematisches Argumentieren
Bei den Fibonacci-Zahlen 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... hat man die Abfolge „ungerade, ungerade, gerade, ungerade, ungerade, gerade, ...“. Es kommen niemals zwei gerade Zahlen hintereinander vor. Begründen Sie, dass das niemals passieren kann. Schreiben Sie einen Begründungstext, der beginnt mit: „Angenommen, es würden zwei gerade Fibonacci-Zahlen aufeinander folgen. ...“

