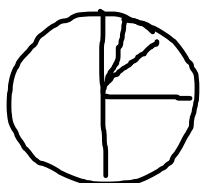


$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^m}$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{4+2+1}{8} = \frac{7}{8} = 1 - \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{8+4+2+1}{16} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$$

Indukt. auf

$n=1$ linkes S

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$$

rechte S $1 - \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$



Ind voraus

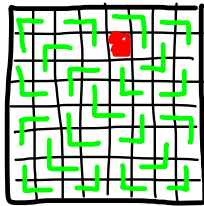
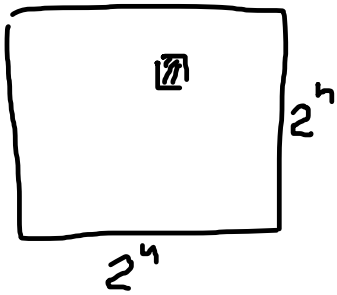
$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^m}$$

Ind. behaupt

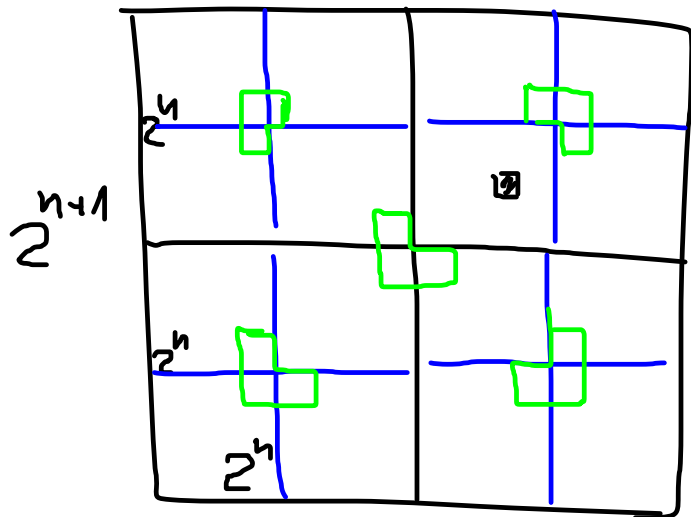
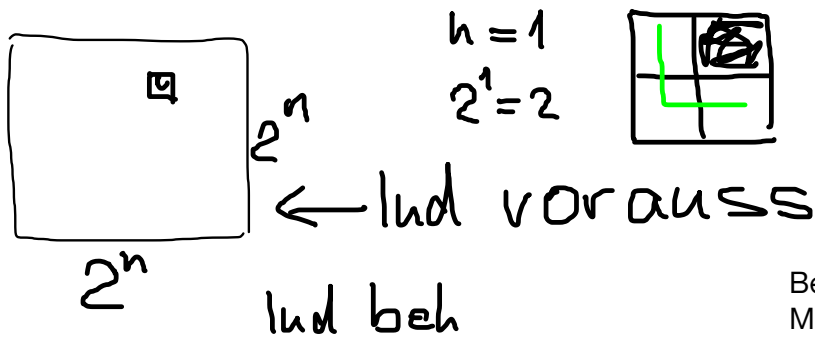
$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{m+1}}$$

Beweis

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{2^k} &= \underbrace{\sum_{k=1}^m \frac{1}{2^k}} + \frac{1}{2^{m+1}} \quad \left| \begin{array}{l} 2^{m+1} = 2^m \cdot 2 \\ (\cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) 2 \end{array} \right. \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{2-1}{2^{m+1}} = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} \quad \square \end{aligned}$$



Vollständige Induktion in einem ganz anderen Kontext
 Gegeben ist ein Quadrat der Seitenlänge 2^n . An einer beliebigen Stelle wird ein Einheitsquadrat herausgeschnitten. Beweisen Sie, dass das so "gelöcherte" Quadrat vollständig mit den Dreiersteinen ausgelegt werden kann.



Beweis:
 Man teilt das $2^{(n+1)}$ -Quadrat mittig in vier 2^n -Quadrate auf. In einem liegt das vorgegebene "Loch". Das lässt sich nach Ind.voraussetzung auslegen. In die übrigen drei 2^n -Quadrate legt man so einen Stein, dass jeweils ein 1×1 -Quadrat in einem 2^n -Quadrat liegt. Damit sind diese 2^n -Quadrate auch "gelöchert" und können nach Ind.voraussetzung ausgelegt werden. Also ist das "gelöcherte" $2^{(n+1)}$ -Quadrat vollständig auslegbar. q.e.d.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Beispiel: $n=5$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{30+10+5+3+2}{60} \\ &= \frac{50}{60} = \frac{5}{6} \quad \checkmark \end{aligned}$$