Aufg 1

a) Aussage: $A \Rightarrow B$ oder C

Kontraposition

$\neg(B \text{ oder } C) \Rightarrow \neg A$

$\neg B \text{ und } \neg C \Rightarrow \neg A$

„Wenn $a \neq n$ und a größer gleich n ist, dann ist a kein Teiler von n." 2

b) Verneinung: $A \text{ und } \neg(B \text{ oder } C)$

$\Leftrightarrow A \text{ und } \neg B \text{ und } \neg C$

„a ist ein Teiler von n und a ist ungleich n und a ist größer gleich n" 2

c)

A	B	C	$A \Rightarrow$	$(B \text{ oder } C)$	$(A \text{ und}$	$\neg B)$	$\Rightarrow C$
w	w	w	$\boxed{w}$	w	f	f	$\boxed{w}$
w	w	f	$\boxed{w}$	w	f	f	$\boxed{w}$
w	f	w	$\boxed{w}$	w	w	w	$\boxed{w}$
w	f	f	$\boxed{f}$	f	w	w	$\boxed{f}$
f	w	w	$\boxed{w}$	w	f	f	$\boxed{w}$
f	w	f	$\boxed{w}$	w	f	f	$\boxed{w}$
f	f	w	$\boxed{w}$	w	f	w	$\boxed{w}$
f	f	f	$\boxed{w}$	f	f	w	$\boxed{w}$
Reihenfolge Ausfüllen:			2.	1.	4.	3.	5.

Tabelle 4

In Spalte 2. und 5. stehen jeweils die Endergebnisse. Diese müssen gleich sein. Sind sie. 1

d) „Wenn eine Zahl a ein Teiler von n ist und $a \neq n$, dann ist a echt kleiner als n." 1

Aufg 1

Vollständige Induktion

Die zu beweisende Aussage A(n):

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

Beweis durch vollständige Induktion über n :

Induktionsanfang A(1): Die Aussage gilt für $n = 1$

denn: $$\sum_{k=1}^{1} k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2 \qquad \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \qquad 1$$

Induktionsschluss

Induktionsvoraussetzung A(n) : $$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

Induktionsbehauptung A(n +1) : $$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) \qquad 1$$

Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) + (n+1)(n+2) \qquad 1$$

Ind. Vor.

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \qquad 1$$

$$= (n+1)(n+2)\left[\frac{1}{3} n + 1\right] \qquad 1$$

$$= (n+1)(n+2)\,\frac{1}{3}\left[n+3\right]$$

$$= \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3) \qquad 1$$

Q.E.D.

Durch den Induktionsanfang und den Induktionsschluss von n auf n+1 ist die Aussage A für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

6

Klausuraufgabe 1 Stellenwertsysteme mit Lösung

a) Formen Sie 1010110_2 in eine Darstellung des 8er-Systems um und dokumentieren Ihren Lösungsweg. *(4 Punkte)*

1. Weg:

- zunächst durch Schreibung in der Stellenschreibweise und ausrechnen eine Darstellung im Dezimalsystem erlangen:

$$\begin{aligned} 1010110_2 &= 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 \\ &= 1\cdot 64 + 0\cdot 32 + 1\cdot 16 + 0\cdot 8 + 1\cdot 4 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 \\ &= 64 + 16 + 4 + 2 \\ &= 86_{10} \end{aligned}$$

- Umwandlung durch Verfahren (erkennbar) und richtige Rechnungen:

fortgesetztes Teilen:

$$\begin{aligned} 86_{10} &= 10\cdot 8 + 6 && \to 6 \\ 10 &= 1\cdot 8 + 2 && \to 2 \\ 1 &= 0\cdot 8 + 1 && \to 1 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 86_{10} &= 10\cdot 8 + 6 \\ &= (1\cdot 8 + 2)\cdot 8 + 6 \\ &= ((0\cdot 8 + \underline{1})\cdot 8 + \underline{2})\cdot 8 + \underline{6} \end{aligned}$$

oder

Ausschöpfen (Potenzen):

$$8^0 = 1,\quad 8^1 = 8,\quad 8^2 = 64,\quad 8^3 = 512$$

$$\begin{aligned} 86_{10} &= 1\cdot 64 + 22 \\ &= 1\cdot 64 + 2\cdot 8 + 6 \\ &= 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 6\cdot 8^0 \end{aligned}$$

- eine Darstellung im 8er-System: $1010110_2 = 86_{10} = 126_8$

2. Weg:

- zunächst in der Stellenschreibweise darstellen:

$$1010110_2 = 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$$

- die 2er-Potenzen soweit möglich als 8er-Potenzen schreiben:

$$\begin{aligned} 1010110_2 &= 1\cdot 8^2 + 0\cdot 2^2\cdot 8^1 + 1\cdot 2\cdot 8^1 + 0\cdot 8^1 + 1\cdot 2^2\cdot 8^0 + 1\cdot 2^1\cdot 8^0 + 0\cdot 8^0 \\ &= 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 6\cdot 8^0 \end{aligned}$$

- durch zusammenfassen gleicher 8er-Potenzen entstehen die Koeffizienten: $1010110_2 = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 6\cdot 8^0$

- Lösung: $1010110_2 = 126_8$

b) Stellen Sie eine Regel zur Teilbarkeit durch 13 im Dezimalsystem auf. *(5 Punkte)*

1. Weg:

- Bestimmung der Restefolge (zu den Potenzen jeweils kongruente Zahlen bezüglich der Division durch 13):

mod 13	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Restefolge	$\equiv 1$	$\equiv -3$	$\equiv(-3)\cdot(-3)$ $=9\equiv -4$	$\equiv(-3)\cdot(-4)$ $=12\equiv -1$	$\equiv(-3)\cdot(-1)$ $=3$	$\equiv(-3)\cdot 3=-9$ $\equiv 4$	$\equiv(-3)\cdot 4$ $=-12\equiv 1$ damit beginnt die Restefolge von vorne	$\equiv(-3)\cdot 1=-3$

- Begründung des Abbruchs der Rechnung mit der Wiederholung der Restefolge.

  oder

  mit der Stelle 10^0 beginnend bekommen die Stellen endlos fortlaufend die Gewichte 1, -3, -4, -1, 3, 4

- Eine Zahl ist durch 13 teilbar, wenn ihre mit der Folge 1, -3, -4, -1, 3, 4 erstellten gewichteten Quersumme durch 13 teilbar ist.

2. Weg:

- Bestimmung der Restefolge mit Worten begründet, z. B. durch schriftl. Division der Zehnerpotenzen und festhalten der Reste.
- Begründung des Abbruchs der Rechnung mit der Wiederholung der Restefolge.

  oder

  mit der Stelle 10^0 beginnend bekommen die Stellen endlos fortlaufend die Gewichte 1, -3, -4, -1, 3, 4

- Eine Zahl ist durch 13 teilbar, wenn ihre mit der Folge 1, -3, -4, -1, 3, 4 erstellten gewichteten Quersumme durch 13 teilbar ist.

c) Begründen Sie, dass 13131313 durch 13 teilbar ist. *(1 Punkt)*

1. Weg:

- erstellen der gewichteten Quersumme mit Hilfe der in b) erstellten Restefolge:

$$\begin{aligned} 13131313 &\equiv 3\cdot 1 + 1\cdot(-3) + 3\cdot(-4) + 1\cdot(-1) + 3\cdot 3 + 1\cdot 4 + 3\cdot 1 + 1\cdot(-3) \\ &= 3 - 3 - 12 - 1 + 9 + 4 + 3 - 3 \\ &= 19 - 19 = 0 \end{aligned}$$

- Die gewichteten Quersumme ist durch 13 teilbar und damit auch die kongruente Ausgangszahl 13131313.

2. Weg:

- 13131313 in Teile gliedern, die alle klar durch 13 teilbar sind:

$$13131313 = 13\cdot 10^6 + 13\cdot 10^4 + 13\cdot 10^2 + 13\cdot 10^0$$

- Da alle Summanden einzeln als Vielfache von 13 dargestellt werden können, sind sie durch 13 teilbar und damit auch die Summe.

3. Weg:

- schriftliche Division:

```
1 3 1 3 1 3 1 3 : 1 3 = 1 0 1 0 1 0 1
1 3
---
  0 1
    0
  ---
    1 3
    1 3
    ---
      0 1
        0
      ---
        1 3
        1 3
        ---
          0 1
            0
          ---
            1 3
            1 3
            ---
              0
```

- Da kein Rest bleibt ist die Zahl 13131313 durch 13 teilbar.

Klausuraufgabe Platonische Körper

Lösung

a) Stahlrohr

Würfel:	12 Kanten á 1 m	=> 12 m
Oktaeder:	12 Kanten á 0,707 m	=> 8,484 m, da

$$k^2_{okt} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$k_{okt} = \sqrt{2\frac{a^2}{4}}$$

$$k_{okt} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \text{ / a = 1}$$

$$k_{okt} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$k_{okt} \approx 0,707m$$

Summe Stahlrohr: 12 m + 8,484 m = **20,484 m**

Der Künstler benötigt 20,484 m Stahlrohr.

b) Haltekonstruktion

Diagonalen im Würfel: $d = a \cdot \sqrt{2}$

6 Diagonalen: $6 \cdot d = 6 \cdot a \cdot \sqrt{2} \,\Big|\, \sqrt{2} \approx 1,414$

$6 \cdot d = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \approx$ **8,485 m**

Zusätzlich werden 8,485 m Stahlrohr benötigt.

c) Oberfläche Oktaeder

„Oktaederdreieck" mit a:= Kantenlänge des Oktaeders:

$A = \frac{g \cdot h}{2}$ / g = a und

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$$

=> $h = \frac{a}{2}\sqrt{3} \approx 0,612$

$A = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{2}$ oder $A = \frac{a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{genau} = \frac{0,707 \cdot 0,707 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} \approx 0,216$

bei 8 „Oktaederdreiecken" gilt:

$8A_{genau} = 8 \cdot 0,216 =$ **1,728 m²**

ODER mit Formel:

$$O_{Oktaeder} = 2 \cdot a^2 \sqrt{3}$$

Der Künstler benötigt rund 1,728 m² Transparentpapier.

Lösung II, bei Nutung der Lösungsvorgabe:

$$h \approx 0,433$$

$$A_{gegeben} = \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} \approx 0,108$$

$$8A_{gegeben} = 8 \cdot 0,108 = \underline{\underline{\mathbf{0,864\ m^2}}}$$

Lösung:

a) Die markierten Zahlen stehen in der Spalte k =3
Die obere der beiden Zellen bestimmt die Zahl, die quadriert wird. Danach gilt:

$$\binom{6}{3}-\binom{4}{3}=20-4=16=4^2$$

$$\binom{4+2}{3}-\binom{4}{3}=4^2$$

$$\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}=n^2$$

b) $$\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}=\frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!}-\frac{n!}{3!(n-3)!}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{3!(n-1)!}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)n}{3!}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)n}{3!}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$=\frac{(n+2)(n+1)n-n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$=\frac{n\left[(n+2)(n+1)-(n-1)(n-2)\right]}{3\cdot 2\cdot 1}$$

$$\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}=\frac{n}{6}\left[\left(n^2+3n+2\right)-\left(n^2-3n+2\right)\right]$$

$$=\frac{n}{6}[6n]$$

$$\boxed{\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}=n^2}$$ was zu zeigen war

c) $$\binom{n+2}{3}-\binom{n}{3}=n^2$$

$$\binom{35+2}{3}-\binom{35}{3}=35^2$$

$$\binom{37}{3}-\binom{35}{3}=7770-6545=1225=35^2$$

Die beiden Zahlen stehen in der 35. und 37. Reihe.

Denn: $$\binom{37}{3}=\frac{37!}{3!(37-3)!}=\frac{37\cdot 36\cdot 35\cdot 34!}{6\cdot 34!}=37\cdot 6\cdot 35=7770$$

$$\binom{35}{3}=\frac{35!}{3!(35-3)!}=\frac{35\cdot 34\cdot 33\cdot 32!}{6\cdot 32!}=35\cdot 17\cdot 11=6545$$