

Aufg 1

a) Aussage: $A \Rightarrow B$ oder C

Kontraposition

$$\neg(B \text{ oder } C) \Rightarrow \neg A$$

$$\neg B \text{ und } \neg C \Rightarrow \neg A$$

„Wenn $a \neq n$ und a größer gleich n ist, dann ist a kein Teiler von n .“

(2)

b) Verneinung: A und $\neg(B \text{ oder } C)$

$$\Leftrightarrow A \text{ und } \neg B \text{ und } \neg C$$

„ a ist ein Teiler von n und a ist ungleich n und a ist größer gleich n “

(2)

c) A B C $A \Rightarrow (B \text{ oder } C)$ $(A \text{ und } \neg B) \Rightarrow C$

w	w	w	w	w	f	f	w
w	w	f	w	w	f	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	w	w	w	f
f	w	w	w	w	w	f	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	w	w	w	f	w	w
f	f	f	w	f	w	w	w

Reihenfolge Ausfüllen:

2.

1.

4.

3.

5.

Tabelle
(4)

In Spalte 2. und 5. stehen jeweils die Endergebnisse. Diese müssen gleich sein. Sind sie.

(1)

d) „Wenn eine Zahl a ein Teiler von n ist und $a \neq n$, dann ist a echt kleiner als n .“

(1)

Aufg 1

Vollständige Induktion

Die zu beweisende Aussage $A(n)$:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$$

Beweis durch vollständige Induktion über n :

Induktionsanfang $A(1)$: Die Aussage gilt für $n=1$

denn:

$$\sum_{k=1}^1 k(k+1) = 1 \cdot 2 = 2 \qquad \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \qquad \textcircled{1}$$

Induktionsschluss

Induktionsvoraussetzung $A(n)$: $\sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

Induktionsbehauptung $A(n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3)$ $\textcircled{1}$

Induktionsbeweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1) = \sum_{k=1}^n k(k+1) + (n+1)(n+2) \qquad \textcircled{1}$$

Ind. Vor.

$$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) \qquad \textcircled{1}$$

$$= (n+1)(n+2) \left[\frac{1}{3} n + 1 \right] \qquad \textcircled{1}$$

$$= (n+1)(n+2) \frac{1}{3} [n+3]$$

$$= \frac{1}{3} (n+1)(n+2)(n+3) \qquad \textcircled{1}$$

Q.E.D.

Durch den Induktionsanfang und den Induktionsschluss von n auf $n+1$ ist die Aussage A für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.



Klausuraufgabe 1 Stellenwertsysteme **mit Lösung**

- a) Formen Sie 1010110_2 in eine Darstellung des 8er-Systems um und dokumentieren Ihren Lösungsweg. (4 Punkte)

1. Weg:

- zunächst durch Schreibung in der Stellenschreibweise und ausrechnen eine Darstellung im Dezimalsystem erlangen:

$$\begin{aligned} 1010110_2 &= 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= 64 + 16 + 4 + 2 \\ &= 86_{10} \end{aligned}$$

- Umwandlung durch Verfahren (erkennbar) und richtige Rechnungen:

fortgesetztes Teilen:

$$\begin{aligned} 86_{10} &= 10 \cdot 8 + 6 && \rightarrow 6 \\ 10 &= 1 \cdot 8 + 2 && \rightarrow 2 \quad \text{oder} \\ 1 &= 0 \cdot 8 + 1 && \rightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 86_{10} &= 10 \cdot 8 + 6 \\ &= (1 \cdot 8 + 2) \cdot 8 + 6 \\ &= ((0 \cdot 8 + 1) \cdot 8 + 2) \cdot 8 + 6 \end{aligned}$$

oder Ausschöpfen (Potenzen):

$$\begin{aligned} 8^0 &= 1, \quad 8^1 = 8, \quad 8^2 = 64, \quad 8^3 = 512 \\ 86_{10} &= 1 \cdot 64 + 22 \\ &= 1 \cdot 64 + 2 \cdot 8 + 6 \\ &= 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 \end{aligned}$$

- eine Darstellung im 8er-System: $1010110_2 = 86_{10} = 126_8$

2. Weg:

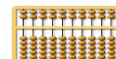
- zunächst in der Stellenschreibweise darstellen:

$$1010110_2 = 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$

- die 2er-Potenzen soweit möglich als 8er-Potenzen schreiben:

$$\begin{aligned} 1010110_2 &= 1 \cdot 8^2 + 0 \cdot 2^2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 2 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^1 + 1 \cdot 2^2 \cdot 8^0 + 1 \cdot 2^1 \cdot 8^0 + 0 \cdot 8^0 \\ &= 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 \end{aligned}$$

- durch zusammenfassen gleicher 8er-Potenzen entstehen die Koeffizienten: $1010110_2 = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0$
- Lösung: $1010110_2 = 126_8$



b) Stellen Sie eine Regel zur Teilbarkeit durch 13 im Dezimalsystem auf. (5 Punkte)

1. Weg:

- Bestimmung der Restefolge (zu den Potenzen jeweils kongruente Zahlen bezüglich der Division durch 13):

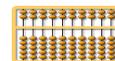
mod 13	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
Restefolge	$\equiv 1$	$\equiv -3$	$\equiv (-3) \cdot (-3)$ $= 9 \equiv -4$	$\equiv (-3) \cdot (-4)$ $= 12 \equiv -1$	$\equiv (-3) \cdot (-1)$ $= 3$	$\equiv (-3) \cdot 3 = -9$ $\equiv 4$	$\equiv (-3) \cdot 4$ $= -12 \equiv 1$	$\equiv (-3) \cdot 1 = -3$

damit beginnt die Restefolge von vorne

- Begründung des Abbruchs der Rechnung mit der Wiederholung der Restefolge.
oder
mit der Stelle 10^0 beginnend bekommen die Stellen endlos fortlaufend die Gewichte 1, -3, -4, -1, 3, 4
- Eine Zahl ist durch 13 teilbar, wenn ihre mit der Folge 1, -3, -4, -1, 3, 4 erstellten gewichteten Quersumme durch 13 teilbar ist.

2. Weg:

- Bestimmung der Restefolge mit Worten begründet, z. B. durch schriftl. Division der Zehnerpotenzen und festhalten der Reste.
- Begründung des Abbruchs der Rechnung mit der Wiederholung der Restefolge.
oder
mit der Stelle 10^0 beginnend bekommen die Stellen endlos fortlaufend die Gewichte 1, -3, -4, -1, 3, 4
- Eine Zahl ist durch 13 teilbar, wenn ihre mit der Folge 1, -3, -4, -1, 3, 4 erstellten gewichteten Quersumme durch 13 teilbar ist.



c) Begründen Sie, dass 13131313 durch 13 teilbar ist. (1 Punkt)

1. Weg:

- erstellen der gewichteten Quersumme mit Hilfe der in b) erstellten Restefolge:

$$\begin{aligned} 13131313 &\equiv 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) \\ &= 3 - 3 - 12 - 1 + 9 + 4 + 3 - 3 \\ &= 19 - 19 = 0 \end{aligned}$$

- Die gewichteten Quersumme ist durch 13 teilbar und damit auch die kongruente Ausgangszahl 13131313.

2. Weg:

- 13131313 in Teile gliedern, die alle klar durch 13 teilbar sind:

$$13131313 = 13 \cdot 10^6 + 13 \cdot 10^4 + 13 \cdot 10^2 + 13 \cdot 10^0$$

- Da alle Summanden einzeln als Vielfache von 13 dargestellt werden können, sind sie durch 13 teilbar und damit auch die Summe.

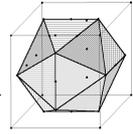
3. Weg:

- schriftliche Division:

$$\begin{array}{r} 13131313 : 13 = 1010101 \\ \underline{13} \\ 01 \\ \underline{0} \\ 13 \\ \underline{13} \\ 01 \\ \underline{0} \\ 13 \\ \underline{13} \\ 01 \\ \underline{0} \\ 13 \\ \underline{13} \\ 0 \end{array}$$

- Da kein Rest bleibt ist die Zahl 13131313 durch 13 teilbar.

Klausuraufgabe Platonische Körper



Lösung

a) Stahlrohr

Würfel: 12 Kanten á 1 m \Rightarrow 12 m

Oktaeder: 12 Kanten á 0,707 m \Rightarrow 8,484 m, da

$$k_{\text{okt}}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$k_{\text{okt}} = \sqrt{2 \frac{a^2}{4}}$$

$$k_{\text{okt}} = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2} \quad | \quad a = 1$$

$$k_{\text{okt}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$k_{\text{okt}} \approx 0,707 \text{ m}$$

Summe Stahlrohr: 12 m + 8,484 m = **20,484 m**

Der Künstler benötigt 20,484 m Stahlrohr.

b) Haltekonstruktion

Diagonalen im Würfel: $d = a \cdot \sqrt{2}$

6 Diagonalen: $6 \cdot d = 6 \cdot a \cdot \sqrt{2} \quad | \quad \sqrt{2} \approx 1,414$

$$6 \cdot d = 6 \cdot 1 \cdot \sqrt{2} \approx \underline{\underline{8,485 \text{ m}}}$$

Zusätzlich werden 8,485 m Stahlrohr benötigt.

c) Oberfläche Oktaeder

„Oktaederdreieck“ mit a:= Kantenlänge des Oktaeders:

$$A = \frac{g \cdot h}{2} \quad | \quad g = a \text{ und}$$

$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{a}{2} \sqrt{3} \approx 0,612$$

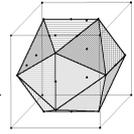
$$A = \frac{a \cdot a \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} \quad \text{oder} \quad A = \frac{a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$A_{\text{genau}} = \frac{0,707 \cdot 0,707 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} \approx 0,216$$

bei 8 „Oktaederdreiecken“ gilt:

$$8A_{\text{genau}} = 8 \cdot 0,216 = \underline{\underline{1,728 \text{ m}^2}}$$

Klausuraufgabe Platonische Körper



ODER mit Formel:

$$O_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot a^2 \sqrt{3}$$

Der Künstler benötigt rund 1,728 m² Transparentpapier.

Lösung II, bei Nutzung der Lösungsvorgabe:

$$h \approx 0,433$$

$$A_{\text{gegeben}} = \frac{0,5 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} \approx 0,108$$

$$8A_{\text{gegeben}} = 8 \cdot 0,108 = \underline{\underline{0,864 \text{ m}^2}}$$

**Lösung:**

a) Die markierten Zahlen stehen in der Spalte $k=3$

Die obere der beiden Zellen bestimmt die Zahl, die quadriert wird. Danach gilt:

$$\binom{6}{3} - \binom{4}{3} = 20 - 4 = 16 = 4^2$$

$$\binom{4+2}{3} - \binom{4}{3} = 4^2$$

$$\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} &= \frac{(n+2)!}{3!(n+2-3)!} - \frac{n!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{3!(n-1)!} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3!(n-3)!} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n}{3!} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)n - n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n[(n+2)(n+1) - (n-1)(n-2)]}{3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} &= \frac{n}{6} [(n^2 + 3n + 2) - (n^2 - 3n + 2)] \\ &= \frac{n}{6} [6n] \end{aligned}$$

$$\boxed{\binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2}$$

was zu zeigen war

$$\text{c) } \binom{n+2}{3} - \binom{n}{3} = n^2$$

$$\binom{35+2}{3} - \binom{35}{3} = 35^2$$

$$\binom{37}{3} - \binom{35}{3} = 7770 - 6545 = 1225 = 35^2$$

$$\text{Denn: } \binom{37}{3} = \frac{37!}{3!(37-3)!} = \frac{37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34!}{6 \cdot 34!} = 37 \cdot 6 \cdot 35 = 7770$$

$$\binom{35}{3} = \frac{35!}{3!(35-3)!} = \frac{35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32!}{6 \cdot 32!} = 35 \cdot 17 \cdot 11 = 6545$$

Die beiden Zahlen stehen in der 35. und 37. Reihe.