Übung 10 (freiwillige Übung)
Lösung

Aufgabe 2
Über die Summen aufeinander folgender ganzer Zahlen (Safgaz) haben wir in der Vorlesung folgende Regeln erarbeitet:

Die Summe von u, u ungerade, aufeinander folgender ganzer Zahlen ist durch u teilbar.
Die Summe von g, g gerade, aufeinander folgender ganzer Zahlen lässt beim Teilen durch g den Rest $\frac{g}{2}$.
Aus diesen Regeln kann man nun jeweils eine Strategie ableiten, mit der man zu einer gegebenen Zahl die Darstellung als Safgaz ermittelt.

Die Primfaktorzerlegung von 2014 ist $2014 = 2\cdot 19\cdot 53$.
Dann sind alle Teiler von 2014 $\quad 2014 = 1 \cdot 2014 = 2 \cdot 1007 = 19 \cdot 106 = 38 \cdot 53$.
Hier hat man immer ein Paar aus einer geraden und einer ungeraden Zahl.

Jeder ungerade Teiler (außer der 1) führt auf eine Safgaz mit einer ungeraden Anzahl von Summanden. Das ist der Größe nach:
19: Die Summanden laufen von 106 – 18:2 =97 bis 106 + 18:2 = 115, also

$$\sum_{k=97}^{115} k = 97+98+99+...+114+115 = 2014$$

53: Die Summanden laufen von 38 – 52:2 =12 bis 38 + 52:2 = 64, also

$$\sum_{k=12}^{64} k = 12+13+14+...+63+64 = 2014$$

1007: Die Summanden laufen von 2 – 1006:2 = –501 bis 2 + 1006:2 = 505, also

$$\sum_{k=-501}^{505} k = -501-500-499-...-1+0+1+2...+505 = 2014$$

Dieses ist eine Lösung, die mit negativen ganzen Zahlen arbeitet.

Jeder gerade Teiler von 2014 kommt ungeradzahlig oft vor. Also ist das Doppelte eines geraden Teilers nicht Teiler von 2014, sondern lässt einen Rest, der der Teiler selbst ist. Das sind genau die Bedingungen, die man bei einer geraden Anzahl von Summanden für eine Safgaz braucht. Auch hier gehen wir die Teiler der Größe nach durch.
Teiler 2, also $2 \cdot 2 = 4$ als Anzahl der Summanden
2014:4 = 503,5 , die Summanden laufen von 503 – 1 = 502 bis 504 + 1 = 505

$$\sum_{k=502}^{505} k = 502+503+504+505 = 2014$$

Teiler 38, also $2 \cdot 38 = 76$ als Anzahl der Summanden
2014:76 = 26,5 , die Summanden laufen von 26 – 37 = –11 bis 27 + 37 = 64

$$\sum_{k=-11}^{64} k = -11-10-...-1+0+1+...+63+64 = 2014$$

Teiler 106, also $2 \cdot 106 = 212$ als Anzahl der Summanden
2014:106 = 9,5 , die Summanden laufen von 9 – 105 = –96 bis 10 + 105 = 115

$$\sum_{k=-96}^{115} k = -96-95-...-1+0+1+...+114+115 = 2014$$

Teiler 2014, also 2 · 2014 = 4028 als Anzahl der Summanden
2014:4028 = 0,5 , die Summanden laufen von 0 – 2013 = –2013 bis 1 + 2013 = 2014

$$\sum_{k=-2013}^{2014} k = -2013-2012-\ldots-1+0+1+\ldots+2013+2014=2014$$

Da man systematisch alle Teiler von 2014 durchgegangen ist, sind das alle möglichen Lösungen.

Ergänzende Betrachtung zu den gefundenen Lösungen

Vergleicht man die Lösungen, so fällt einem auf, dass immer zwei zusammengehören. Zu einer Lösung mit einer ungeraden Anzahl von Summanden gehört eine mit einer geraden Anzahl von Summanden, wobei immer eine nur mit positiven Zahlen auskommt und die andere im negativen Bereich startet und bei der gleichen, größten Zahl endet. In unserem Fall sind das:

$\sum_{k=97}^{115} k = 97+98+99+\ldots+114+115=2014$ (nur positiv, ungerade Anzahl (19) von Summanden) und

$\sum_{k=-96}^{115} k = -96-95-\ldots-1+0+1+\ldots+114+115=2014$ (Start mit negativen Zahlen, gerade Anzahl (212) von Summanden)

$\sum_{k=12}^{64} k = 12+13+14+\ldots+63+64=2014$ (nur positiv, ungerade Anzahl (53) von Summanden) und

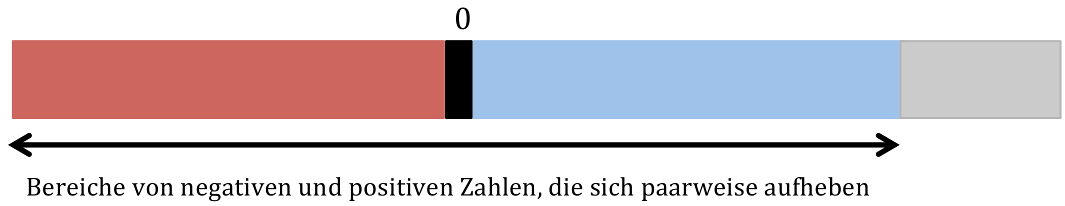
$\sum_{k=-11}^{64} k = -11-10-\ldots-1+0+1+\ldots+63+64=2014$ (Start mit negativen Zahlen, gerade Anzahl (76) von Summanden)

$\sum_{k=502}^{505} k = 502+503+504+505=2014$ (nur positiv, gerade Anzahl (4) von Summanden) und

$\sum_{k=-501}^{505} k = -501-500-499-\ldots-1+0+1+2\ldots+505=2014$ (Start mit negativen Zahlen, ungerade Anzahl (1007) von Summanden)

Die Erklärung für den Zusammenhang ist recht naheliegen. Bei allen Safgaz, die im Negativen starten, gibt es zu jedem negativen Summanden einen betragsgleichen positiven Summanden. Also gibt es zur Folge aller negativen Summanden einen entsprechenden Abschnitt in den Summanden, der sich dazu summandenweise aufhebt. Übrig bleibt dann ein Abschnitt aus nur positiven Summanden, der für sich in der Summe gerade 2014 ergibt.

grafisch:



Der Bereich der negativen und positiven Zahlen, die sich paarweise aufheben, bildet mit der eingeschlossenen Null eine ungerade Anzahl von Summanden, so dass der verbleibende Rest der Summanden die Eigenschaft un/gerade wechselt gegenüber der Safgaz, die mit negativen Zahlen beginnt.

Damit kann man auch erklären, warum die Lösung

$\sum_{k=-2013}^{2014} k = -2013 - 2012 - ... - 1 + 0 + 1 + ... + 2013 + 2014 = 2014$ keine Partnerlösung hat.

Denn „klappt“ man den negativen Bereich über den entsprechenden, positiven, bleibt als einziger positiver Summand 2014 übrig, was aber keine Safgaz ist.