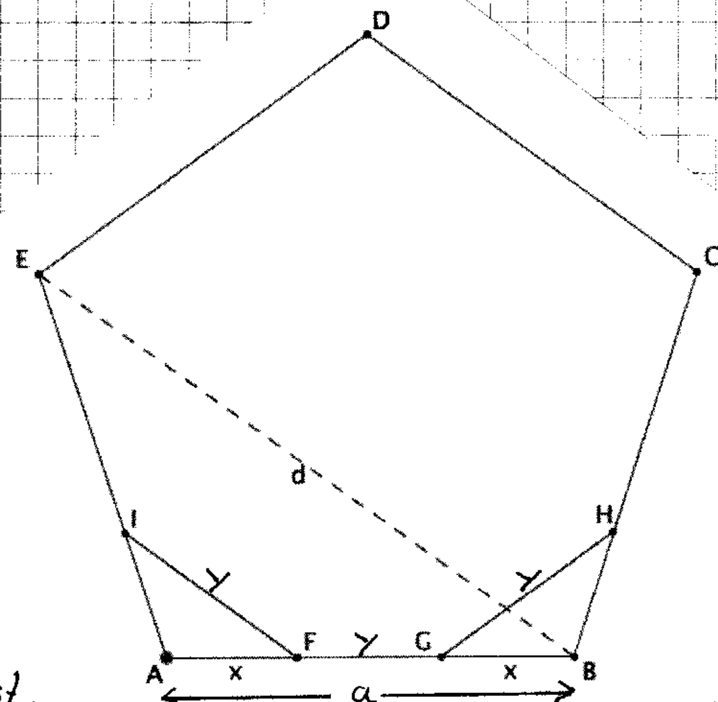
9. Übung, Lösungen

1. Die Länge der Schnitt-Kanten ist y.



<u>Regelmäßiges</u> 10-Eck heißt, dass auch der Rest der 5-Eck-Kante $\overline{FG}$ die Länge y hat.

Dann gilt

$$x + y + x = a$$

und $\frac{y}{x} = \frac{d}{a}$ (Ähnlichkeit, Strahlensätze)

$$= \phi \quad \text{goldene Verlängerung}$$

Also $y = \phi x$. Einsetzen $x + \phi x + x = a$

$$x(2+\phi) = a$$

$$x = \frac{1}{2+\phi} a$$

$$\frac{1}{2+\phi} = \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{4+\sqrt{5}+1} = \frac{2}{5+\sqrt{5}} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{25-5}(5-\sqrt{5}) = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \approx 0{,}2764$$

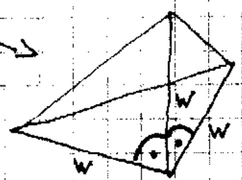
Der Schnitt muss also gut ein Viertel der alten 5-Eck-Kante auf beiden Seiten abschneiden.

2. a) Alle Kanten des Tetraeders sind Diagonalen von Quadraten (Seitenflächen) des Würfels. Also sind sie alle gleich lang. 1

b) Also gilt $t = \sqrt{2}\, w$ 1

c) Der Würfel hat 8 Ecken. 4 davon sind Ecken des Tetraeders. Bei den übrigen 4 Ecken liegen die Lücken. 1

d) Die Lücke vorn rechts ist →



Die Grundfläche ist ein halbes Quadrat: $G = \frac{1}{2} w^2$

Die Höhe ist eine Quadratkante: $h = w$

Also $V_1 = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} w^2 \cdot w = \frac{1}{6} w^3$ 2

e) Das Volumen des Tetraeders ist das Volumen des Würfels minus das Gesamtvolumen der Lücken

$V_T = V_W - V_L = w^3 - 4 \cdot \frac{1}{6} w^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3} w^3}}$ 1

f) Der Tetraeder füllt den Würfel zu einem Drittel aus. Aber w ist nicht die Tetraederkante t.

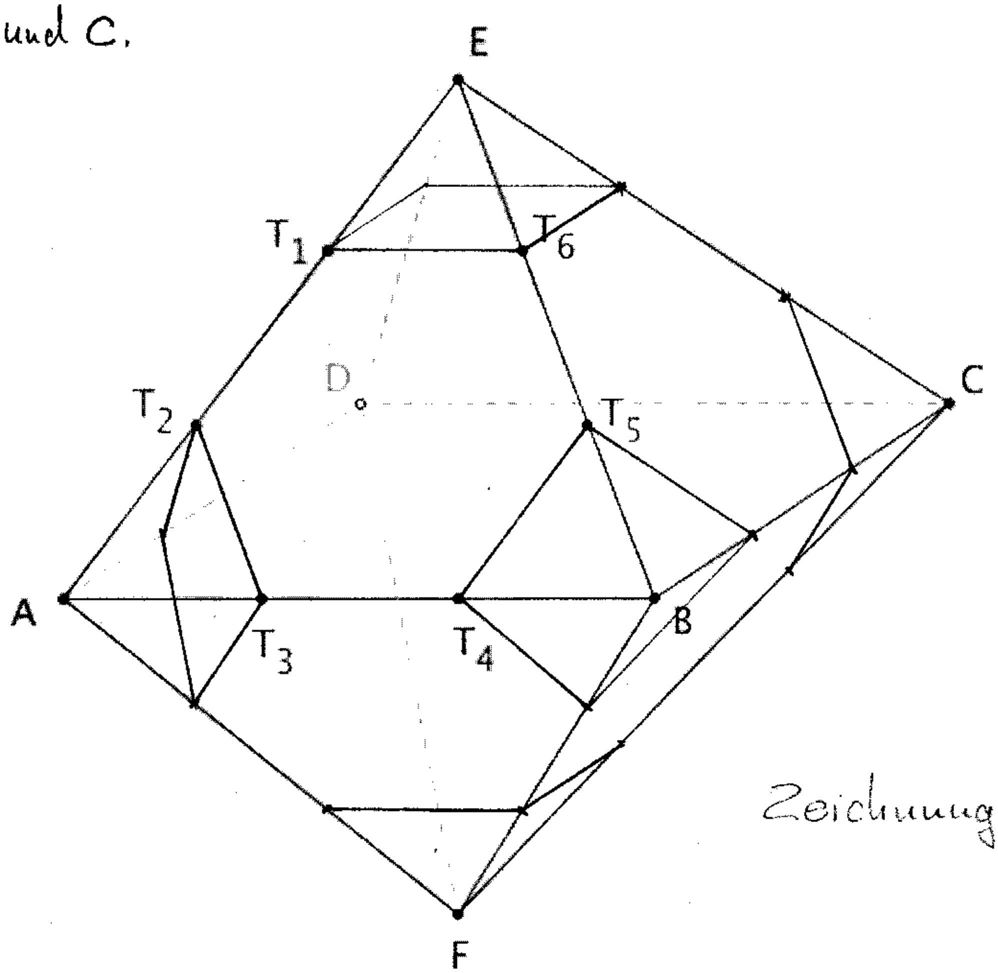
$t = \sqrt{2}\, w \Rightarrow w = \frac{1}{\sqrt{2}} t \Rightarrow w^3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} t^3 = \frac{1}{4}\sqrt{2}\, t^3$

$V_T = \frac{1}{3} w^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2}\, t^3 = \frac{1}{12}\sqrt{2}\, t^3$ 2

wie in den Formelsammlungen

3.

a. und c.

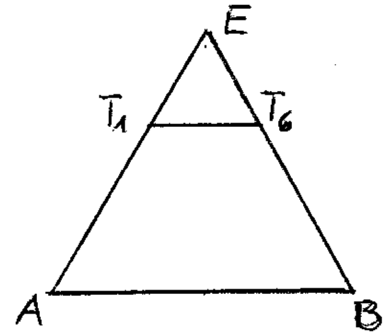


Zeichnung ③

b. Das Dreieck ABE ist gleichseitig.
Also sind alle Drittel der drei Seiten auch gleich lang. Insbesondere gilt $|ET_1| = |ET_6|$. Zusammen mit dem 60°-Winkel bei E folgt, dass auch T_1T_6E ein gleichseitiges Dreieck ist. Also gilt $|T_1T_6| = |T_1E|$ und damit auch $= |T_1T_2|$. Analog folgt, dass alle Seiten ~~gl~~ des Sechsecks $T_1T_2 \ldots T_6$ gleich lang sind. ②

Die Innenwinkel des Sechsecks sind alle Nebenwinkel von 60°-Winkeln der kleinen gleichseitigen Dreiecke, also alle 120°. ①

d. Ist $|AB| = 1$, dann ist die Kante des Dreiecks T_1T_6E $\frac{1}{3}$, also $A_t = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2\sqrt{3}$
$= \frac{1}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$



Die Fläche des großen Dreiecks ABE ist $A_G = \frac{\sqrt{3}}{4}$. ~~[illegible]~~ Dann ist eine Sechseckfläche $A_S = A_G - 3 \cdot A_t = \frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}$
$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3}$

Der Körper hat 8 Sechsecke. 1

Jedes Quadrat hat eine Kantenlänge von $\frac{1}{3}$, also $A_Q = \frac{1}{9}$. Der Körper hat 6 Quadrate.

$A = 8 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} + 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{3} + 1\right)$
$\approx 2{,}98$

1

Die Oberfläche ist also knapp 3 Flächeneinheiten.

4.a. Zu jeder Ecke gehören 3 Kanten, also gilt zunächst $E \cdot 3 = K$. Aber jede Kante verläuft zwischen zwei Ecken, also gilt bei unverbundenen Kanten: $K \cdot 2 = E \Leftrightarrow K = \frac{1}{2}E$
Verbindet man beide Argumente, kommt man auf $K = \frac{3}{2}E$. 1

b. Durch das Abschneiden werden aus jeder Oktaeder-Ecke 4 des neuen Körpers: $E = 6 \cdot 4 = 24$
Beim Abschneiden bleiben die Kanten des Oktaeders zum Teil erhalten, das sind 12 Kanten. Von jedem Schnitt-

quadrat kommen noch 4 kanten dazu
$K = 12 + 6 \cdot 4 = 36$

$\frac{3}{2} E = \frac{3}{2} \cdot 24 = 3 \cdot 12 = 36 = K$ stimmt ☺ 2

5a. 1. Lösung

Es gibt zwei Sorten Dreiecke:

i) Dreiecke, die genau an einer Fünfeckkante liegen.
12 Fünfecke => 60 Fünfeckkanten
=> 60 Dreiecke der Sorte i)

ii) Dreiecke, die zwischen Ecken von drei Fünfecken liegen
12 Fünfecke => 60 Ecken
$60 : 3 = 20$ Dreiecke der Sorte ii)

Also gibt es $60 + 20 = \underline{80}$ Dreiecke 2

2. Lösung: Um jedes Fünfeck gibt es einen Kranz aus 15 Dreiecken. Davon werden 10 doppelt gezählt: $10 \cdot 12 : 2 = 60$
und 5 dreifach $5 \cdot 12 : 3 = 20$
Also gibt es $60 + 20 = \underline{\underline{80}}$ Dreiecke

b. Jede Körperecke enthält genau eine Fünfeckecke. $\underline{\underline{E = 12 \cdot 5 = 60}}$ 1

Die Vielecke haben $12 \cdot 5 + 80 \cdot 3 = 300$ (Flächen-)kanten. Immer 2 Flächenkanten bilden eine Körperkante. $\underline{\underline{K = 150}}$ 1

c. 80 Dreiecke, 12 Fünfecke

$F = 80 + 12 = 92$ $\qquad k = 150$

$E = \qquad 60$

$E + F = 152$ $\qquad k + 2 = 152$

stimmt ☺ 1

A2	A3	A4	A5	Σ
8	8	3	5	24