Dr. Reimund Albers  Mathematisches Denken u. Lehren  WiSe 13/14

## 8. Übung. Lösungen

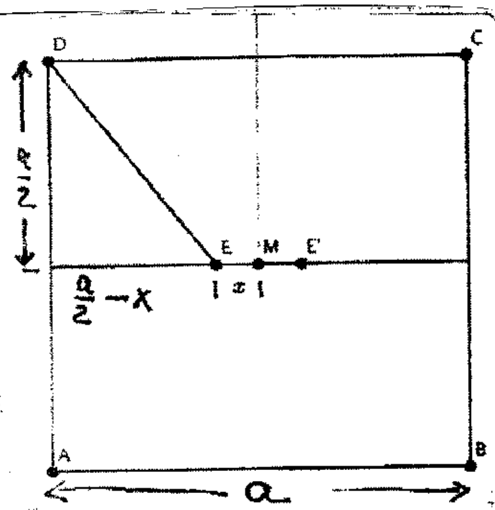
## PRÄSENZÜBUNGEN

1\. a. Wenn es für die Parkettierung eine globale Lösung gibt, dann haben alle (drei) Vielecke eine gerade Eckenzahl oder die anderen beiden Vielecke haben die gleiche Eckenzahl.

b. Ein Vieleck hat eine ungerade Eckenzahl und die anderen beiden Vielecke haben eine unterschiedliche Eckenzahl und (trotzdem) gibt es für die Parkettierung eine globale Lösung.

## HAUSÜBUNGEN

2\. $|DE|$ berechnen über den Satz v. Pythagoras




$$|DE|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}-x\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - 2x\frac{a}{2} + x^2$$

$$= \frac{a^2}{2} - ax + x^2$$

Ansatz 1

Dann gilt noch $|EE'| = 2x$

Die Bedingung $|DE| = |EE'|$ wird quadriert zu $|DE|^2 = |EE'|^2$, also

Ansatz 1

$$\frac{a^2}{2} - ax + x^2 = 4x^2 \quad | -4x^2$$

$$-3x^2 - ax + \frac{a^2}{2} = 0 \quad | :(-3)$$

Rechnung in a +2

$$x^2 + \frac{1}{3}ax - \frac{a^2}{6} = 0$$

nur positiv

pq-Formel $\quad x = -\frac{1}{6}a \pm \sqrt{\frac{a^2}{36} + \frac{a^2}{6}} = -\frac{a}{6} \pm \frac{a}{6}\sqrt{7}$

Für $a = 10\,cm$ erhält man als Lösung

$$x = \left(-\frac{10}{6} + \frac{10}{6}\sqrt{7}\right) cm \approx 2{,}74\ cm$$

Lösung 1

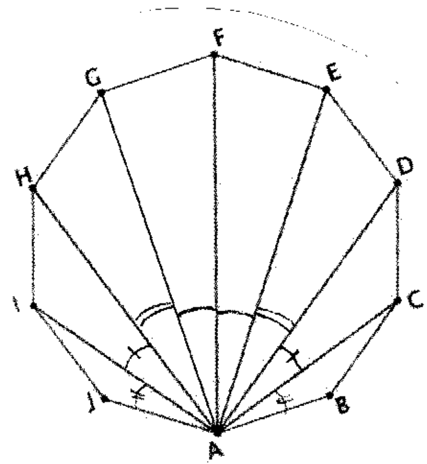
Dann ist $|EE'| \approx 5{,}48\ cm$

$|DE|^2 \approx (50 - 10 \cdot 2{,}74 + 2{,}74^2)\ cm^2$

$\approx 30{,}12\ cm$ also $|DE| \approx 5{,}49\ cm$

gute Übereinstimmung

3. In der Figur ist AF die Symmetrieachse.




a) Dann gilt

$|\sphericalangle FAG| = |\sphericalangle EAF|$

$|\sphericalangle GAH| = |\sphericalangle DAE|$

$|\sphericalangle HAI| = |\sphericalangle CAD|$

$|\sphericalangle IAJ| = |\sphericalangle BAC|$ 1

b) Der Innenwinkel im 10-Eck ist

$\beta = 180° \frac{10-2}{10} = 18° \cdot 8 = 144°$ 1

Das $\Delta JAI$ ist gleichschenklig. Also sind die Winkel bei A und I gleich groß.

$144° + 2x = 180° \Rightarrow 2x = 36° \Rightarrow x = 18°$

Also $\underline{\underline{|\sphericalangle IAJ| = 18°}}$ 1

Das Viereck AHIJ ist symmetrisch. Also sind die Winkel bei A und H gleich groß.

$2 \cdot 144° + 2x = 360° \Rightarrow 2x = 72° \Rightarrow x = 36°$

Also ist $|\sphericalangle HAJ| = 36°$. Da $|\sphericalangle IAJ| = 18°$, ist

$\underline{\underline{|\sphericalangle HAI|}} = 36° - 18° = \underline{\underline{18°}}$ 1

Das Fünfeck AGHIJ ist symmetrisch.
Also sind die Winkel $\sphericalangle GAJ$ und $\sphericalangle HGA$ gleich groß.

$3 \cdot 144 + 2x = 540^\circ \Rightarrow 2x = 108^\circ \Rightarrow x = 54^\circ$

Also $|\sphericalangle GAJ| = 54^\circ$ Da $|\sphericalangle HAJ| = 36^\circ$, ist
$|\sphericalangle GAH| = 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ$ 1

Das Sechseck AFGHIJ ist symmetrisch.
Also sind die Winkel $\sphericalangle FAJ$ und $\sphericalangle GFA$ gleich groß.

$4 \cdot 144 + 2x = 720^\circ \Rightarrow 2x = 144 \Rightarrow x = 72^\circ$

Also ist $|\sphericalangle FAJ| = 72^\circ$. Da $|\sphericalangle GAJ| = 54^\circ$, ist
$|\sphericalangle FAG| = 72^\circ - 54^\circ = 18^\circ$ 1

Damit ist gezeigt, dass alle Winkel bei A gleich groß sind.

4. a. Der Winkel bei E, also $\sphericalangle FEA$, ist ein rechter Winkel. Denn $\overline{AE}$ liegt im „Boden" des Quaders und EF ist senkrecht zum „Boden", also auch senkrecht zu AE. Dann ist $\overline{AF}$ die Hypotenuse im $\triangle AEF$. 1

b. $\overline{AE}$ ist die Hypotenuse im Dreieck ABE.
Also: $a^2 + b^2 = |AE|^2$
$\overline{AE}$ ist Kathete im $\triangle AEF$.
Also: $|AE|^2 + c^2 = |AF|^2$
$\Rightarrow |AF|^2 = a^2 + b^2 + c^2$
$\Rightarrow \underline{\underline{|AF| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$ 2

4

5. a. Der „Deckel“ ist ein Dreieck. Also geht von der hinteren Kante noch ein Quadrat nach unten. Dann sind es oben 3 und unten 6 Quadrate, also 9 Quadrate
Von den Ecken des „Deckels“ gehen Dreiecke nach unten. Also gibt es insgesamt 4 Dreiecke

2

b. Man hat 3 Schichten von Ecken:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{oben} & 3 \text{ Ecken} \\ \text{Mitte} & 6 \text{ Ecken} \\ \text{unten} & 6 \text{ Ecken} \end{array}\right\} \text{15 Ecken}$$

Man rechnet erst die Flächenkanten aus:

| | | |
|---|---|---|
| 9 Quadrate | → | 36 F-Kanten |
| 4 Dreiecke | → | 12 F-Kanten |
| 1 Sechseck | → | 6 F-Kanten |
| | | 54 F-Kanten |

also $54 : 2 = 27$ Kanten (des Körpers)

2

c. Man hat $F = 9 + 4 + 1 = 14$ $E = 15$
$K = 27$, $F + E = 29$ $K + 2 = 29$

also ist die Eulersche Polyederformel erfüllt

1

| A2 | A3 | A4 | A5 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 6 | 3 | 5 | 17 ← 100% |
| +2 | | | | (19) |