

7. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNGEN

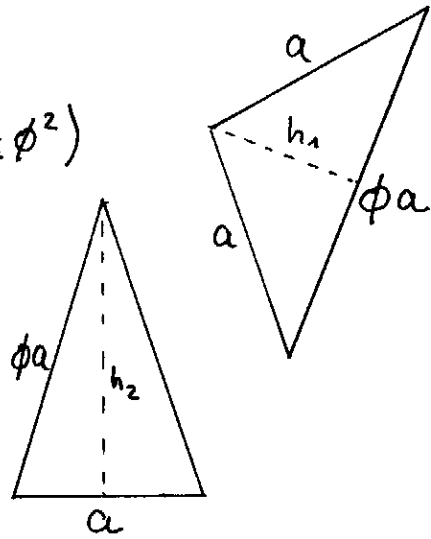
1. Linkes Teildreieck ADE

$$h_1^2 + \left(\frac{1}{2}\phi a\right)^2 = a^2$$

$$h_1^2 = a^2 - \frac{1}{4}\phi^2 a^2 = a^2 \left(1 - \frac{1}{4}\phi^2\right)$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\phi a \cdot a \sqrt{1 - \frac{1}{4}\phi^2}$$

$$= \frac{1}{2}a^2 \phi \sqrt{1 - \frac{1}{4}\phi^2}$$



2. mittleres Teildreieck

$$h_2^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = (\phi a)^2$$

$$h_2^2 = \phi^2 a^2 - \frac{1}{4}a^2 = a^2 \left(\phi^2 - \frac{1}{4}\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}a \sqrt{\phi^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}a^2 \sqrt{\phi^2 - \frac{1}{4}}$$

$$A = 2A_1 + A_2 = a^2 \phi \sqrt{1 - \frac{1}{4}\phi^2} + \frac{1}{2}a^2 \sqrt{\phi^2 - \frac{1}{4}} \quad (*)$$

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \phi^2 = \phi + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2}$$

$$\begin{aligned} \phi \sqrt{1 - \frac{1}{4}\phi^2} &= \sqrt{\phi^2 \left(1 - \frac{1}{4}\phi^2\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3) \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5}+3)\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3) \cdot \frac{1}{8}(5-\sqrt{5})} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}(5\sqrt{5} - 5 + 15 - 3\sqrt{5})} = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\phi^2 - \frac{1}{4}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{5}+3) - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}(2\sqrt{5}+6-1)} = \frac{1}{4} \sqrt{5+2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Einsetzen in (*) ergibt

$$\begin{aligned} A &= a^2 \frac{1}{4} \sqrt{10+2\sqrt{5}} + a^2 \frac{1}{4} \sqrt{5+2\sqrt{5}} \\ &= \frac{1}{4} a^2 \left(\sqrt{10+2\sqrt{5}} + \sqrt{5+2\sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

HAUSÜBUNGEN

2 a. $\frac{1}{4} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \quad | -\frac{1}{4}$

$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$ (1)

b. $\frac{1}{c} = \frac{1}{4} - \frac{1}{b} = \frac{b-4}{4b}$

$c = \frac{4b}{b-4}$ (1)

Es ist eigentlich egal, nach welcher Variablen man auflöst. Beide Variablen spielen die gleiche Rolle. (1)

c. Polynomdivision

$$\begin{array}{r} 4b : (b-4) = 4 + \frac{16}{b-4} \\ -(4b-16) \\ \hline +16 \text{ (Rest)} \end{array}$$

Trick: $\frac{4b}{b-4} = \frac{4b-16+16}{b-4} = \frac{4(b-4)+16}{b-4} = 4 + \frac{16}{b-4}$ (1)

d. Damit $c = 4 + \frac{16}{b-4}$ eine natürliche Zahl ≥ 3 ist, muss $b-4$ ein Teiler von 16 sein. (1)

Teiler von 16	Ausatz für b	Ergebnis b	Ergebnis c	
1	$b-4=1$	5	$4 + \frac{16}{1} = 20$	} symmetrisch b und c vertauscht
2	$b-4=2$	6	$4 + \frac{16}{2} = 12$	
4	$b-4=4$	8	$4 + \frac{16}{4} = 8$	
8	$b-4=8$	12	$4 + \frac{16}{8} = 6$	} symmetrisch b und c vertauscht
16	$b-4=16$	20	$4 + \frac{16}{16} = 5$	

e. Die gefundenen Lösungen für (a, b, c) sind:

4, 5, 20 Probe: $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \neq$
 $= \frac{5+4+1}{20} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \checkmark$

4, 6, 12 Probe: $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$
 $= \frac{3+2+1}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \checkmark$

4, 8, 8 Probe: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
 $= \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \checkmark$ (2)

Prinzipiell muss man in d. auch die negativen Teiler von 16 betrachten, also -1, -2, -4, -8 und -16. Aber in keinem dieser Fälle ergibt sich eine Lösung mit $b \geq 3$ und $c \geq 3$. Da damit alle Teiler von 16 betrachtet sind, hat man alle Lösungsmöglichkeiten untersucht. (1)

3. a. $\alpha = \frac{360^\circ}{9} = \underline{\underline{40^\circ}}$ (1)

b. Im Viereck MJKL gilt
 $\alpha + 90^\circ + \beta + 90^\circ = \text{~~180~~ } 360^\circ$
 ↑
 Scheitelwinkel zum Winkel aus a.

$\beta = 360^\circ - 180^\circ - 40^\circ$
 $\underline{\underline{\beta = 140^\circ}}$ (1)

c. γ liegt im Trapez ABCI, das symmetrisch ist. Also gilt $2\beta + 2\gamma = 360^\circ$

$2\gamma = 360^\circ - 2 \cdot 140^\circ = 80^\circ$
 $\underline{\underline{\gamma = 40^\circ}}$ (1)

noch
3

d. Im Viereck ICKH gilt:

$$\text{Winkel bei I: } 140^\circ - \gamma = 100^\circ$$

$$\text{" " K: } 90^\circ$$

$$\text{" " H: } 140^\circ$$

$$100^\circ + \delta + 90^\circ + 140^\circ = 360^\circ$$

$$\delta = 360^\circ - 330^\circ$$

$$\underline{\underline{\delta = 30^\circ}}$$

①

4. Die vier Innenwinkel müssen zusammen 360° ergeben

$$180^\circ \left(1 - \frac{2}{a}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{b}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{c}\right) + 180^\circ \left(1 - \frac{2}{d}\right) = 360^\circ$$

$$1 - \frac{2}{a} + 1 - \frac{2}{b} + 1 - \frac{2}{c} + 1 - \frac{2}{d} = 2 \quad | -4$$

$$-\frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{2}{c} - \frac{2}{d} = -2 \quad | :(-2)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1$$

②

5. a) Kantenpaare

$$1-3 \quad 2-4 \quad 5-8 \quad 6-9 \quad 7-10$$

b) gegenüberliegende Flächen

$$A-H \quad B-E \quad C-F \quad D-G$$

je Fehler $(-0,5)$ ③

A2	A3	A4	A5	Σ
10	4	2	3	19