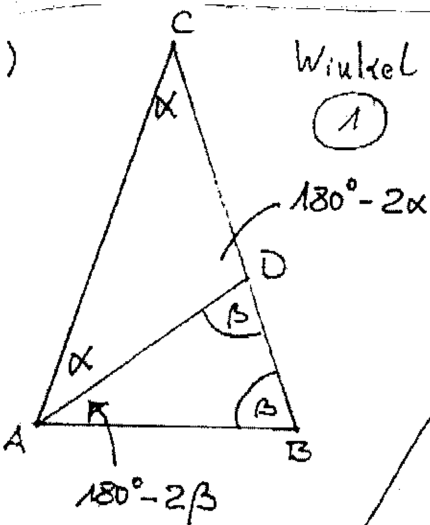
6. Übung, Lösungen

1. a)



Winkel ①

Die beiden Winkel bei D ergänzen sich zu 180°:

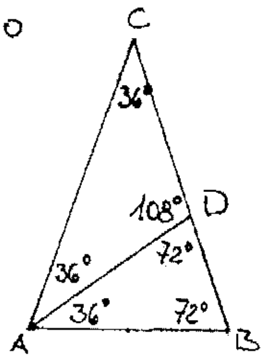
$$(180° - 2\alpha) + \beta = 180°$$
$$-2\alpha + \beta = 0$$
$$\beta = 2\alpha$$

Da ΔABC gleichschenklig, gilt

$$\alpha + (180° - 2\beta) = \beta$$
$$\alpha + 180° = 3\beta$$
$$\alpha + 180° = 6\alpha$$
$$5\alpha = 180°$$
$$\alpha = 36°$$

$$\beta = 2\alpha = 72°$$

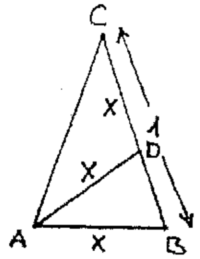
also



b) ΔABC und ΔABD. Bei beiden sind die beiden Winkel an der Basis 72°, in der Spitze 36°. Entsprechende Winkel sind gleich groß
$\Rightarrow$ beide Dreiecke sind ähnlich.

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|AB|}$$

c)



In beiden Dreiecken:

$\frac{\text{Basis}}{\text{Schenkel}}$ | $\quad \frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

sinnvolle geom. Lösung ist $x = \varphi$

HAUSÜBUNGEN

2. $$\frac{\cancel{20}\cdot 19\cdot \cancel{18}\cdot 17\cdot \overset{8}{\cancel{16}}\cdot 15}{1\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{6}}$$

Zuerst in den Nenner 6! schreiben

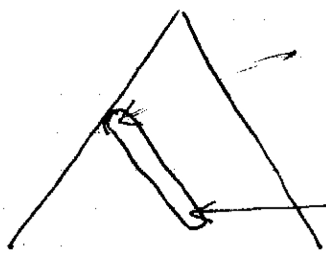
Dann in den Zähler von 20 beginnend die Zahlen absteigend schreiben, bis auch dort 6 Zahlen stehen.

Dann kürzen. Der Nenner muss sich vollständig wegkürzen. Text 2

Es bleibt $19\cdot 17\cdot 8\cdot 15 = 323\cdot 120 = 38.760$ Rechn. 1

3. $$\sum_{k=0}^{14}\binom{5+k}{k} = \binom{5}{0}+\binom{6}{1}+\ldots+\binom{19}{14}$$

Skizze



Der Stiel beginnt bei $\binom{5}{0}$, also in Zeile $n=5$ und läuft bis in Zeile $n=19$. Er ist 15 Zellen lang.

Beschr. 2

Dann steht das Ergebnis in Zelle $\binom{20}{14}$

Von letzter Zelle $\binom{19}{14}$ eine Zeile runter in der gleichen Sp. $\binom{20}{14}$

$$\binom{20}{14} = \binom{20}{6} = 38.760 \quad \text{(in 2. ausgerechnet)}$$ 1

4. a.

$a+3b+53$

$a+2b+13 \mid 40+b$

$a+b \quad 13+b \quad 27$

$a \quad b \quad 13 \quad 14$

Allgemeiner Ansatz mit a und b in den beiden unteren Steinen.

Also $a+3b+53 = 72 \quad |-53$

$a+3b = 19 \quad |-a$

$3b = 19-a$

Also muss $19-a$ durch 3 teilbar sein

Systematisches Probieren

$a = 1$ $\quad 3b = 18 \quad b = 6 \quad$ Basis $\quad 1 \quad 6 \quad 13 \quad 14$ ✓

$\xrightarrow{+3}$ $a = \cancel{2}\,4$ $\quad 3b = 15 \quad b = 5 \quad$ Basis $\quad 4 \quad 5 \quad 13 \quad 14$ ✓

$\xrightarrow{+3}$ $a = 7$ $\quad 3b = 12 \quad b = 4 \quad$ Basis $\quad 7 \quad 4 \quad 13 \quad 14$ f

Zahlen werden nicht größer

Also gibt es nur zwei Lösungen für die Zahlenm.

```
      72                          72
    26  46                      27  45
  7   19  27                  9   18  27
1   6   13  14              4   5   13  14
```

(3)

b s.u.

5. Vorlesung: Startet man in Zeile n und ...., so erhält man die Fibonacci-Zahl f_{n+1}.

Skript: Für die Fibonacci-Zahl f_n beginnt man bei $\binom{n-1}{0}$

a. Für f_{19} beginnt man bei $\binom{18}{0}$ also in Zeile $n = 18$. (1)

b. Die Summation für f_{19} beginnt mit

$\binom{18}{0} + \binom{17}{1} + \binom{16}{2} + \dots = 1 + 17 + 120 + \dots$ (1)

c. Skript: Ist n ungerade, so endet die Diagonale mit $\binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}}$.

$n = 19$ Also ist die Letzte Zahl $\binom{9}{9} = 1$ (1)

4b. Die Liste für a und b ist systematisch angelegt. a muss immer um 3 verändert werden. a kann nicht kleiner als 1 werden, da es dann negativ wird. (2)

a kann nicht 7 oder größer werden, da dann das Anwachsen in der Basis der Zahlenmauer nicht mehr erfüllt wird.

6. a. $n = 6 \quad \sum_{k=0}^{6} (-1)^k \binom{6}{k}$

$= (-1)^0 \binom{6}{0} + (-1)^1 \binom{6}{1} + (-1)^2 \binom{6}{2} + \ldots + (-1)^6 \binom{6}{6}$

$= +1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1$

$= 32 - 32 = 0$ stimmt! 1

b. Man rechnet die Zahlen einer beliebigen Zeile des Pascalschen Dreiecks mit wechselndem Vorzeichen zusammen. Dann ist die Summe der positiv zählenden Zahlen so groß wie die Summe der negativ zählenden, so dass insgesamt 0 herauskommt. 1

c. $(a+b)^6 = \binom{6}{0} a^6 + \binom{6}{1} a^5 b + \binom{6}{2} a^4 b^2 + \binom{6}{3} a^3 b^3$

$+ \binom{6}{4} a^2 b^4 + \binom{6}{5} a b^5 + \binom{6}{6} b^6$ 1

d $a = 1 \quad b = -1$

$(a+b)^6 = 0^6 = 0 = \binom{6}{0} \cdot 1 + \binom{6}{1} 1 \cdot (-1) + \binom{6}{2} \cdot 1 \cdot (+1)^2$

$+ \binom{6}{3} \cdot 1 \cdot (-1)^3 + \binom{6}{4} \cdot 1 \cdot (-1)^4 + \binom{6}{5} \cdot 1 \cdot (-1)^5$

$+ \binom{6}{6} \cdot 1 \cdot (-1)^6$

was genau die Entwicklung in a. ist. 1

e. Nach dem Binomischen Lehrsatz ist

$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$

Setzt man $a = 1$ und $b = -1$, so erhält man links $(1-1)^n = 0^n = 0$ und rechts die Summe $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}(-1) + \binom{n}{2}(-1)^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n$

5

Der Faktor $(-1)^k$ ergibt genau das wechselnde Vorzeichen vor den Zahlen $\binom{n}{k}$. Das sind genau alle Zahlen einer Zeile aus dem Paskalschen Dreieck.

2

A2	A3	A4	A5	A6	Σ
3	3	5	3	6	20