5. Übung, Lösungen

1. a) $n!(n+1) = 1\cdot 2\cdot 3\ldots\cdot n\cdot(n+1) = (n+1)!$

b) $\frac{n!}{n(n-1)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cancel{(n-1)}\cancel{n}}{\cancel{n}\cancel{(n-1)}} = (n-2)!$

c) $(n+2)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n(n+1)(n+2)$

$n+2! = n+2$ im Allgem. <u>viel</u> kleiner als

d) $(n+2)!$ ~~$=$~~ $n!+2!$ im Allgem. kleiner als

$= n!\cdot(n+1)(n+2)$

e. Beispiel: $n=4$ Dann ist $(2n)! = (2\cdot 4)! = 8!$

$= 4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8$

Aber $2!\cdot n! = 2\cdot 4!$

also ist das viel kleiner als das

f. $\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{(n-k)}{(k+1)}$

$$= \frac{n!\;\cancel{(n-k)}}{k!(k+1)\cdot(n-k-1)!\cancel{(n-k)}}$$

$$= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-(k+1))!} = \binom{n}{k+1}$$

HAUSÜBUNGEN

2. nach A: Spalte 1 mehr $\rightarrow \binom{n}{k}$

nach B: Zeile 1 mehr, Spalte gleich $\binom{n+1}{k-1}$

nach C: Zeile 1 weniger, Spalte 1 weniger also $\binom{n-1}{k-2}$

nach D: Zeile und Spalte 2 mehr $\binom{n+2}{k+1}$

je 0,5

2

2

3\. a. i. $n = 4 + 9 = 13$ (0,5)

ii. Der Faktor vor $a^4 b^9$ ist $\binom{13}{9} = \binom{13}{4} = 715$ (1)

iii. $\ldots + 1287\,a^5 b^8 + \overbrace{715\,a^4 b^9} + 286\,a^3 b^{10} + \ldots$ (1,5)

b. $(a+b)^n$ ergibt $\binom{n}{6} a^6 b^{n-6}$

$\binom{n}{6} = \binom{n}{n-6}$ (1)

4\. $F_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right)$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1+\sqrt{5})^5$$

$$= \frac{1}{32}\left(1 + 5\cdot\sqrt{5} + 10\cdot\overbrace{5}^{\sqrt{5}^2} + 10\cdot\overbrace{5\cdot\sqrt{5}}^{\sqrt{5}^3} + 5\cdot\overbrace{5\cdot 5}^{\sqrt{5}^4} + \overbrace{5\cdot 5\cdot\sqrt{5}}^{\sqrt{5}^5}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(1 + 5\sqrt{5} + 50 + 50\sqrt{5} + 125 + 25\sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(176 + 80\sqrt{5}\right)$$ (1,5)

analog ergibt sich

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 (1-\sqrt{5})^5$$

$$= \frac{1}{32}\left(1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(176 - 80\sqrt{5}\right)$$ (1,5)

Einsetzen in Formel v. Binet für F_5

$$F_5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{32}(176 + 80\sqrt{5}) - \frac{1}{32}(176 - 80\sqrt{5})\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{32} \cdot 2 \cdot 80\sqrt{5}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot 80 = \underline{\underline{5}}$$ (1)

5\. a. allgemeine Lösung

$a+3b+3c+d$

$a+2b+c \quad b+2c+d$

$a+b \quad b+c \quad c+d$

$a \quad b \quad c \quad d$

Die Spitze ergibt sich aus den vier Basissteinen a, b, c und d als $a+3b+3c+d$. D.h. die Veränderung von a und d wirkt sich in der Spitze einfach aus, die Veränderung von b und c mit dem Dreifachen

2

b. Man erhöht einen äußeren Stein (a oder d) um einen Betrag und verringert den anderen Stein um den gleichen

90
33 57
13 20 37
$\underset{+4}{8}$ 5 15 $\underset{-4}{22}$

90
31 59
11 20 39
4 $\underset{+2}{7}$ $\underset{-2}{13}$ 26

Man erhöht einen mittleren Stein (b oder c) um einen Betrag und den anderen verringert.

Man erhöht einen mittleren Stein (b od. c) und verringert einen äußeren um das Dreifache.

90
35 55
12 23 32
4 $\underset{+3}{8}$ 15 $\underset{-9}{17}$

zwei Strategien

2

c. Mit x ausfüllen

$69+3x$
$25+2x \quad 44+x$
$12+x \quad 13+x \quad 31$
$12 \quad x \quad 13 \quad 18$

$\longrightarrow$

$$69+3x = 90 \quad | -69$$
$$3x = 21 \quad | :3$$
$$x = 7$$

1

4

6. a. $n=5$ $\quad \binom{5}{1}+2\binom{5}{2}+\binom{5}{3} = 5+2\cdot 10+10$

$$= 35$$

$$\binom{7}{3} = 35$$

✓ (1)

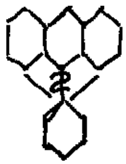
$n=8$ $\quad \binom{8}{2}+2\cdot\binom{8}{3}+\binom{8}{4} = 28+2\cdot 56+70$

$$= 28+112+70$$

$$\binom{10}{4} = 210 \qquad = 210$$

✓ (1)

Bildlich:



Die mittlere Zelle zählt doppelt.

b. $$\binom{n}{k}+2\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2} = \underbrace{\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}}+\underbrace{\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}}$$

Die $\underbrace{\quad}$ Klammern fassen immer zwei nebeneinander liegende Zellen zusammen zur darunter liegenden. Der Spaltenindex ist der höhere der beiden Ausgangszellen.

$$= \underbrace{\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k+2}}$$

$$= \binom{n+2}{k+2}$$

(2)

A2	A3	A4	A5	A6	Σ
2	4	4	5	4	19