Dr. Reimund Albers   Mathem. Denken u. Lehren 1   WiSe 13/14

4. Übung, Lösungen

1\. Die Tabelle rechts zeigt die Werte für Ausgangszahlen von 1 bis 46 (Spalte B). Spalte A gibt an, wie oft φ abgezogen werden kann, damit das Ergebnis gerade noch positiv ist. Also $B - A\cdot\varphi > 0$

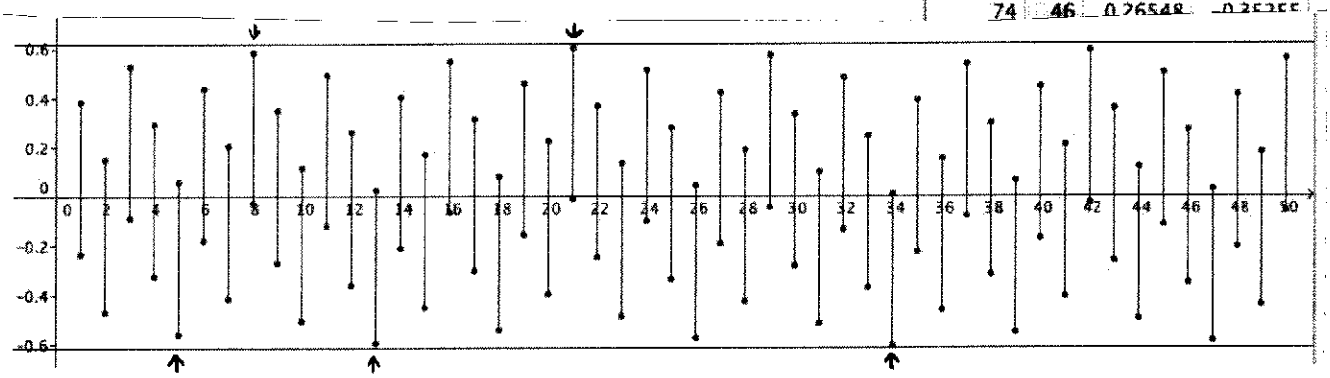
Das Ergebnis steht in Spalte C. Zieht man φ ein Mal mehr ab, ist das Ergebnis negativ.

Also $B - A\cdot\varphi = C > 0$

$$B - (A+1)\varphi = D < 0$$

In der grafischen Darstellung unten sind auf der waagerechten Achse die Ausgangszahlen (Spalte B) aufgetragen, senkrecht dazu die Werte aus Spalte C (oberer Punkt) ~~od~~ und D (unterer Punkt) und mit einer Linie verbunden. Hier kann man besonders

A	B	C	D
0.61803	1	0.38197	-0.23607
3	2	0.1459	-0.47214
4	3	0.52786	-0.09017
6	4	0.2918	-0.32624
8	5	0.05573	-0.56231
9	6	0.43769	-0.18034
11	7	0.20163	-0.41641
12	8	0.58359	-0.03444
14	9	0.34752	-0.27051
16	10	0.11146	-0.50658
17	11	0.49342	-0.12461
19	12	0.25735	-0.36068
21	13	0.02129	-0.59675
22	14	0.40325	-0.21478
24	15	0.16718	-0.45085
25	16	0.54915	-0.06888
27	17	0.31308	-0.30495
29	18	0.07701	-0.54102
30	19	0.45898	-0.15905
32	20	0.22291	-0.39512
33	21	0.60488	-0.01316
35	22	0.36881	-0.24922
37	23	0.13274	-0.48529
38	24	0.51471	-0.10333
40	25	0.27864	-0.33939
42	26	0.04257	-0.57546
43	27	0.42454	-0.1935
45	28	0.18847	-0.42956
46	29	0.57044	-0.0476
48	30	0.33437	-0.28367
50	31	0.0983	-0.51973
51	32	0.48027	-0.13777
53	33	0.2442	-0.37384
55	34	0.00813	-0.6099
56	35	0.3901	-0.22794
58	36	0.15403	-0.46401
59	37	0.53599	-0.08204
61	38	0.29993	-0.31811
63	39	0.06386	-0.55418
64	40	0.44582	-0.17221
66	41	0.20976	-0.40828
67	42	0.59172	-0.02631
69	43	0.35565	-0.26238
71	44	0.11959	-0.49845
72	45	0.50155	-0.11648
74	46	0.26548	-0.35255

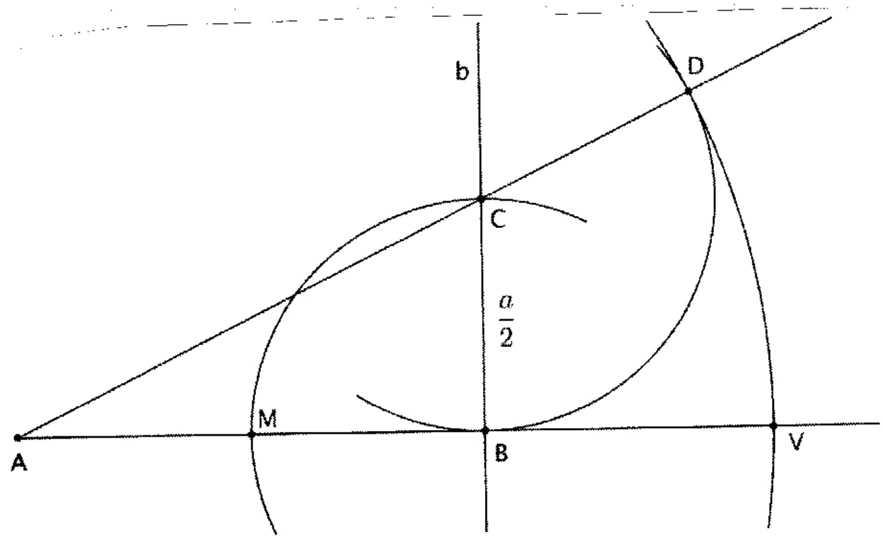


leicht die sehr guten Fälle erkennen. Liegt die Linie besonders hoch oder tief, ist ein Endpunkt besonders dicht bei Null.

Ergebnis. Ist die Ausgangszahl eine Fibonacci-Zahl, so ist der Faktor für φ die nächst größere Fibonacci-Zahl.

$$f_n - f_{n+1} \cdot \varphi \approx 0$$

2.



Man zeichnet in B die Senkrechte b zu $\overline{AB}$ und konstruiert den Mittelpunkt M zu $\overline{AB}$. Der Kreis um B mit dem Radius $|BM|$ schneidet b in C. Die Strecke $\overline{BC}$ hat folglich die Länge $\frac{a}{2}$. Um C wird ein Kreis mit dem Radius $|CB|$ gezeichnet, der den Strahl $\overline{AC}$ im Punkt D schneidet. Die Strecke $\overline{AD}$ hat bereits die gesuchte Länge, mit einem Kreis um A wird sieübertragen auf die Verlängerung von $\overline{AB}$ über B hinaus. $\overline{AV}$ ist dann die gesuchte goldene Verlängerung zu $\overline{AB}$.

$|AB| = a = 2 \cdot \frac{a}{2} \qquad |BC| = 1 \cdot \frac{a}{2}$

Satz v. Pythagoras: $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$$|AC|^2 = \left(2 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 + \left(1 \cdot \frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot 5$$

$|AC| = \frac{a}{2}\sqrt{5} \qquad |CD| = \frac{a}{2} \qquad$ also $|AD| = \frac{a}{2}\sqrt{5} + \frac{a}{2}$

$|AD| = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) = a\,\frac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad |AV| = |AD|$

HAUSÛBUNGEN

3) $f_n^2 - 3 \overset{n=4}{=} f_4^2 - 3 = 3^2 - 3 = 9 - 3 = 6$

$f_{n-3}^2 = f_{4-3}^2 = f_1^2 = 1^2 = 1$

$f_{n^2-3} = f_{4^2-3} = f_{16-3} = f_{13} = 233$

$f_{n^2} - 3 = f_{4^2} - 3 = f_{16} - 3 =$

$f_{n-3^2} = f_{4-3^2} = f_{4-9} = f_{-5}$ gibt es nicht

$f_{(n-3)^2} = f_{(4-3)^2} = f_{1^2} = f_1 = 1$

je $\frac{1}{2}$ 3

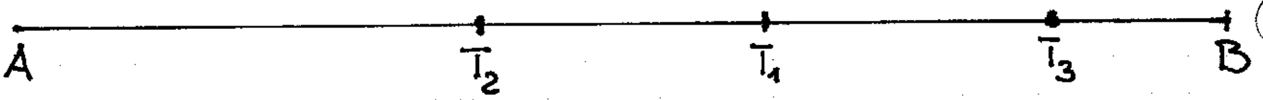
$f_1=1$
$f_2=1$
$f_3=2$
$f_4=3$
$f_5=5$
$f_6=8$
$f_7=13$
$f_8=21$
$f_9=34$
$f_{10}=55$
$f_{11}=89$
$f_{12}=144$
$f_{13}=233$
$f_{14}=377$
$f_{15}=610$
$f_{16}=987$

4) a. $|AT_1| = \varphi \cdot |AB|$

$\approx 0{,}618 \cdot 16\,\text{cm} \approx 9{,}9\,\text{cm}$ (0,5)

b. $|AT_2| = \varphi \cdot |AT_1|$

$\approx 0{,}618 \cdot 9{,}9\,\text{cm} \approx 6{,}1\,\text{cm}$ (0,5)



1

c. Wenn T_1 die Strecke $\overline{T_2B}$ im Goldenen Schnitt teilt, dann ist $\overline{T_1B}$ der Major.

Messen: $|T_2B| = 9{,}9\,\text{cm}$, $|T_1B| = 6{,}1\,\text{cm}$ $\Big\}$ $\frac{|T_1B|}{|T_2B|} = \frac{6{,}1}{9{,}9} \approx 0{,}616$

Ja, T_1 teilt (vermutlich) $\overline{T_2B}$ im Goldenen Schn. 1

oder

Rechnen: $\overline{AT_2}$ ist der Major vom Major,

also gilt $|AT_2| = \varphi^2\,|AB|$

Dann ist $|T_2 B| = |AB| - |AT_2|$

$$= |AB| - \varphi^2 |AB| = |AB| (1-\varphi^2)$$

$$|T_1 B| = |AB| - |AT_1|$$

$$= |AB| - \varphi |AB| = |AB| (1-\varphi)$$

Also $\dfrac{|T_1 B|}{|T_2 B|} = \dfrac{|AB|(1-\varphi)}{|AB|(1-\varphi^2)} = \dfrac{1-\varphi}{1-\varphi^2}$

$\varphi^2 = 1-\varphi$ im Zähler und Nenner einsetzen

$$= \frac{\varphi^2}{1-(1-\varphi)} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi$$ oder 2

Also teilt T_1 die Strecke $\overline{T_2 B}$ im Goldenen Schnitt.

d) $|T_1 T_3| = \varphi \cdot |T_1 B|$

$$\approx 0{,}618 \cdot 6{,}1\,\text{cm} \approx 3{,}8\,\text{cm}$$ 0,5

e) T_1 teilt $\overline{AB}$ im goldenen Schnitt

$\Rightarrow |AT_1| = \varphi |AB|$ und $|T_1 B| = (1-\varphi)|AB|$

$$= \varphi^2 |AB|$$

$|AT_2| = \varphi |AT_1| = \varphi^2 |AB| \approx 0{,}382\,|AB|$

$|T_2 T_1| = (1-\varphi)|AT_1| = \varphi^2 |AT_1| = \varphi^3 |AB| \approx 0{,}236\,|AB|$

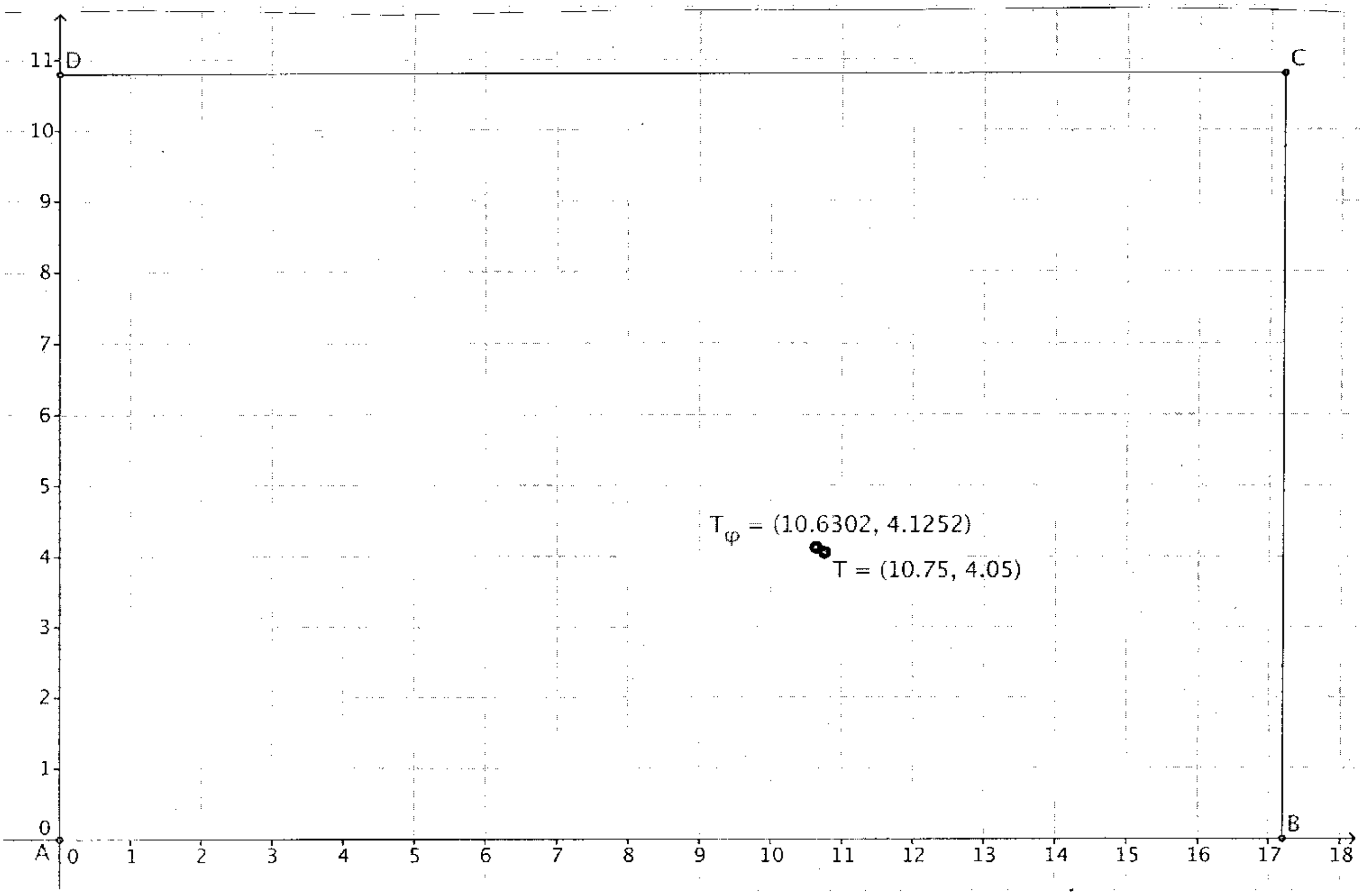
$|T_1 T_3| = \varphi\,|T_1 B| = \varphi \cdot (1-\varphi)|AB| = \varphi^3 |AB| \approx 0{,}236\,|AB|$

$|T_3 B| = (1-\varphi)|T_1 B| = \varphi^2 \cdot \varphi^2 |AB| = \varphi^4 |AB| \approx 0{,}146\,|AB|$ 2

Erläuterung: Der Major ist immer das φ-Fache der Grundstrecke, der Minor das $(1-\varphi)$-Fache gleich das φ^2-Fache der Grundstrecke. 0,5

5

5. a. Gesamtbild 1:20



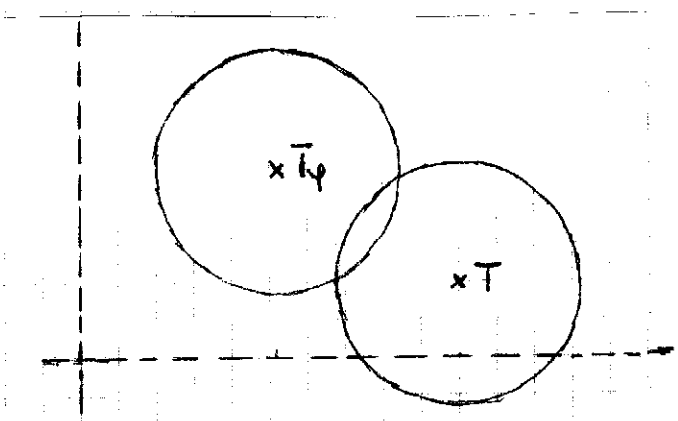
2

b. Die Koordinaten der Mittelpunkte sind

$T\,(215;\,81)$ „Fälschung mit 3:5"

$T_\varphi\,(212,60;\,82,50)$ bei echter Einteilung

Flecken in Originalgröße und Lage zueinander



80cm vom unteren Rand

210 cm vom linken Rand

2

6. a. $\phi_1 = 2 = \frac{2}{1}$

$\phi_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5 = \frac{3}{2}$

$\phi_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}667$

$\phi_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{8}{5} = 1{,}600$ (1)

a. Im Ergebnis ergibt sich immer ein Bruch, in dem eine Fibonacci-Zahl durch die vorhergehende geteilt wird. Das ergibt laut Vorlesung im Grenzwert ϕ (1)

b. $\phi = 1 + \frac{1}{\underbrace{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}_{\text{das ist } \phi}}$

Also gilt $\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \quad | \cdot \phi$

$\phi^2 = \phi + 1 \quad | - \phi - 1$

$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \quad |$ pq-Formel $p = -1 \quad q = -1$

$\phi = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$

„–" ist hier unsinnig, da ϕ sicher positiv ist.

$\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (2)

A3	4	5	6	Σ
3	7	4	4	18