Übung 3 Lösungen

1. nicht - oder

Sie sind nicht über 25 <u>oder</u> Sie haben keinen gültigen Führerschein oder Sie können das Auto mieten. (so etwas sagt keiner)

Kontraposition

Wenn Sie das Auto nicht mieten können, dann sind Sie nicht über 25 <u>oder</u> haben keinen gültigen Führerschein.

Verneinung

Sie sind über 25 und haben einen gültigen Führerschein und können (doch) nicht dieses Auto mieten.

(hier wird eine gesetzliche Regel nicht eingehalten)

2. a) Für ϕ gilt die Gleichung

$$\phi^2 = \phi + 1$$

Laut Zeichnung hat $\overline{BC}$ die Länge $\phi^2 - \phi$ und das ist 1. Also $|BC| = 1$

b) $|B'C'| = \phi \cdot |BC| = \phi \cdot 1 = \phi$

Also gilt $\phi^3 = \phi + 1 + \phi = 2\phi + 1$

c) Wiederum gilt $|B''C''| = \phi \cdot |B'C'|$

Also $|B''C''| = \phi \cdot \phi = \phi^2 = \phi + 1$

Damit gilt $\phi^4 = |A''B''| + |B''C''| = (2\phi + 1) + (\phi + 1)$
$= 3\phi + 2$

2d. $A''B''C''$ wird mit dem Faktor ϕ gestreckt auf $A'''B'''C'''$

$$|A'''C'''| = \phi^5 = |A'''B'''| + |B'''C'''|$$
$$= \phi \cdot |A''B''| + \phi |B''C''|$$
$$= (3\phi + 2) + \phi(\phi + 1)$$
$$= 3\phi + 2 + \phi^2 + \phi$$
$$= 3\phi + 2 + \phi + 1 + \phi$$
$$\phi^5 = 5\phi + 3$$

$$|A^{(4)}C^{(4)}| = \phi^6 = |A^{(4)}B^{(4)}| + |B^{(4)}C^{(4)}|$$
$$= \phi |A'''C'''| + \phi |B'''C'''|$$
$$= 5\phi + 3 \quad + \phi(2\phi + 1)$$
$$= 5\phi + 3 \quad + 2\phi^2 + \phi$$
$$= 5\phi + 3 \quad + 2(\phi + 1) + \phi$$
$$\phi^6 = 8\phi + 5$$

Mit $F_1 = 1$ $F_2 = 1$ $F_3 = 2$ $F_4 = 3$ $F_5 = 5$ $F_6 = 8$
kann man vermuten

$$\phi^n = F_n \cdot \phi + F_{n-1}$$

HAUSÜBUNGEN

3 a. $(a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b$

$$= \begin{array}{l} a^3 + 2a^2b + ab^2 \\ \quad + \; a^2b + 2ab^2 + b^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{mit } a \\ \leftarrow \text{mit } b \end{array} \text{ multiplie.}$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1

b. $(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)$

$$= \begin{array}{l} a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ \quad + \; a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{mit } a \\ \leftarrow \text{mit } b \end{array} \text{ mult.}$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \qquad 1$$

c. $(a+b)^5 = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b)$

$$= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4$$
$$+ a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \qquad 1$$

4 a. Pythagoras: $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

$$|AC|^2 = 3^2 + 2^2 = 13$$

$$\underline{\underline{|AC| = \sqrt{13}}} \qquad 1$$

b. Ebenso $|AC|^2 + |CD|^2 = |AD|^2$

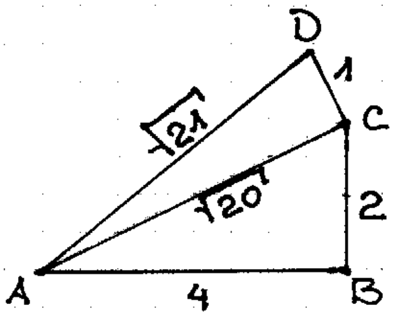
$$|AD|^2 = 13 + 1^2 = 14$$

$$\underline{\underline{|AD| = \sqrt{14}}} \qquad 1$$

c. Zerlegung $21 = 16 + 4 + 1$

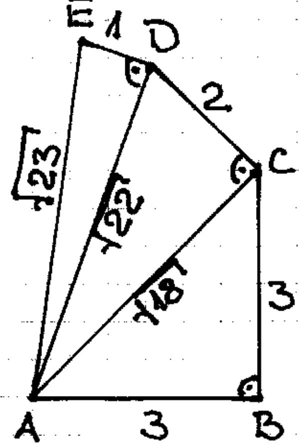
$$= 4^2 + 2^2 + 1^2$$

Danach erhält man die entsprechende Zeichnung



2

d. Man geht mit rechtwinkligen Dreiecken weiter. Die Katheten ergeben sich aus den Summanden.



2

5. a.

$$\underset{A}{|}\overset{D}{\text{―――――――}}\underset{S}{|}\overset{d}{\text{――――}}\underset{B}{|}$$

Die Strecke $\overline{AB}$ soll durch S im „silbernen Schnitt" geteilt sein. Setzt man wieder $|AB| = 1$, so gilt: $D + d = 1$

Definition des „silbernen Schnitts"

$$\frac{D}{1} = 2 \cdot \frac{d}{D}$$ (2)

b. $d = 1 - D$ einsetzen

$$\frac{D}{1} = 2 \cdot \frac{1-D}{D} \quad | \cdot D$$

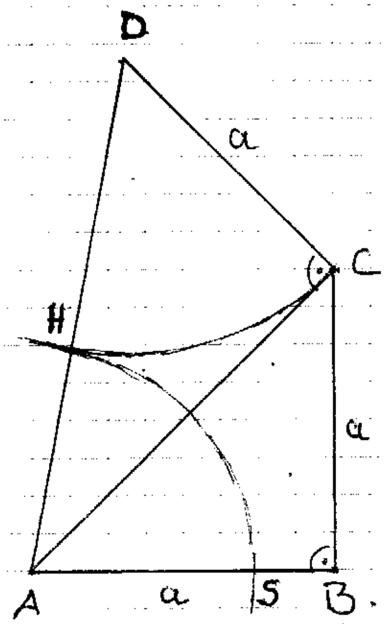
$$D^2 = 2(1-D) = 2 - 2D \quad | +2D - 2$$

$$D^2 + 2D - 2 = 0$$

$$D = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$$ (2)

Geometrisch sinnvoll ist nur $D = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}732$

c.



1. Gegeben ist $\overline{AB}$ mit der Länge a
2. In B zeichnet man eine Senkrechte zu AB und trägt die Länge a ab. Man erhält C.
3. In C zeichnet man eine Senkrechte zu AC und trägt die Länge a ab. Man erhält D.
   $|AD| = a\sqrt{3}$
4. Man schlägt um D einen Kreis mit dem Radius $|DC| = a$. Er schneidet $\overline{AD}$ in H.
   $|AH| = a\sqrt{3} - a = a(\sqrt{3} - 1)$

→

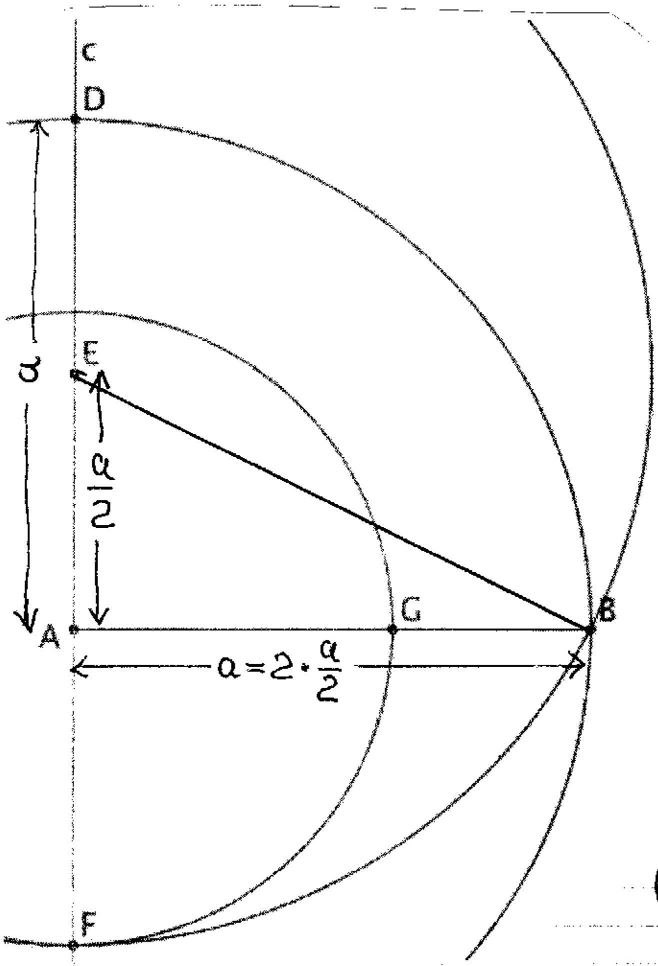
5c) 5. Man schlägt um A einen Kreis mit dem Radius $|AH| = a(\sqrt{3} - 1)$. Er schneidet $\overline{AB}$ in S. S teilt $\overline{AB}$ im „silbernen Schnitt", denn $\overline{AS}$ ist mit der Länge $|AS| = a(\sqrt{3} - 1)$ der „Dicke" zur Länge a. (3)

6. a. 1. Kreis um A mit Radius $|AB| = a$.
Er schneidet c in D.
Also ist $|AD| = a$
Dann ist $|AE| = \frac{a}{2}$

2. Kreis um E mit Radius $|EB|$.
Er schneidet c in F.

3. Kreis um A mit Radius $|AF|$.
Er schneidet $\overline{AB}$ in G. (1,5)

b. Wegen $|AE| = \frac{a}{2}$
und $|AB| = 2 \cdot \frac{a}{2}$
ist $|EB| = \frac{a}{2}\sqrt{5}$.
Also ist auch
$|EF| = \frac{a}{2}\sqrt{5}$
$|AF| = |EF| - |EA|$
$= \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2}$
$= \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$
$= a\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$
Major für Gold. Schnitt



A3	A4	A5	A6	Σ
3	6	7	4	20

(25)