Dr. R. Albers   Mathem. Denken u. Lehren 1   WiSe 13/14

Übung 2 Lösungen

1. $(1+\sqrt{5})^4 = 1 + 4\cdot 1\cdot\sqrt{5} + 6\cdot 1\cdot\sqrt{5}^2 + 4\cdot 1\cdot\sqrt{5}^3 + \sqrt{5}^4$

$= 1 + 4\sqrt{5} + 6\cdot 5 + 4\cdot 5\sqrt{5} + 5\cdot 5$

$= 1 + 4\sqrt{5} + 30 + 20\sqrt{5} + 25$

$= 56 + 24\sqrt{5}$

Also: $k_1 = 56 \quad k_2 = 24$

2. a $\varphi^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$

$\varphi^2 + \varphi = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$ ✓

b i. $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2}{4}(\sqrt{5}+1) = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

stimmt

$1+\varphi = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$

ii. $\varphi^2 + \varphi = 1 \quad | : \varphi$

$\varphi + 1 = \frac{1}{\varphi}$

c i) $\varphi^3 \approx 0{,}618034^3 \approx 0{,}236068$

stimmt

$2\varphi - 1 \approx 2\cdot 0{,}618034 - 1 \approx 0{,}236068$

ii) $\varphi^2 + \varphi = 1 \Rightarrow \varphi^2 = 1 - \varphi$

$\varphi^3 = \varphi^2\cdot\varphi = (1-\varphi)\cdot\varphi = \varphi - \varphi^2 = \varphi - (1-\varphi)$

$= \varphi - 1 + \varphi = 2\varphi - 1$

HAUSÜBUNGEN

3. (1) → (2): In den hinteren beiden Termen $(n+1)$ ausklammern
   (2) → (3): $n\cdot(n+1)$ ausklammern (Die letzte Klammer in (2) ist einfach n)
   (3) → (4): $\frac{1}{3}$ wird in die Klammer multipliziert und $1=\frac{3}{3}$
   (4) → (5): Die reinen Drittel werden zusammengefasst
   (5) → (6): $\frac{1}{3}$ wird ausgeklammert

2

4 a.

	4	5	9	14	23	37
+1	5	5	10	15	25	40 (+3)
−1	3	5	8	13	21	34 (−3)
−1	2	5	7	12	19	31 (−3)

Eine Veränderung der ersten Zahl wirkt sich um das 3-fache in der 6. Zahl aus

1

b.

4		5	9	14	23	37
4	+1	6	10	16	26	42 (+5)
4	−1	4	8	12	20	32 (−5)

Eine Veränderung der zweiten Zahl wirkt sich um das 5-fache in der 6. Zahl aus

1

c. Grundüberlegung: Die Veränderungen um 3 bzw. 5 laufen zusammen bei einer Veränderung um $3\cdot 5=15$

Also kann man eine Erhöhung der ersten Zahl um 5 ausgleichen durch eine →

Verringerung der zweiten Zahl um 3.

5	13	18	31	49	80
10	13	23	36	59	95
10	10	20	30	50	80

(+5, −3, +15, −15)

②

d) Mit der in c) beschriebenen, systematischen Veränderung kann man alle Startzahlenpaare ermitteln, die natürliche Zahlen sind.

5	13	18	31	49	80
10	10	20	30	50	80
15	7	22	29	51	80
20	4	24	28	52	80
25	1	26	27	53	80

(+5, −3)

Verringert man die 1. Zahl 5 um 5, kommt man auf

0 16 16 32 48 80. Wenn man Null als natürliche Zahl zulässt, ist das auch noch eine Lösung.

②

e) Schreibt man die gemeinsame Veränderung um 5 bzw. 3 allgemein auf, kommt man auf $\underbrace{5+5k}_{1.\text{Zahl}}$ $\underbrace{13-3k}_{2.\text{Zahl}}$ $k \in \mathbb{Z}$

Beispiel: $k=-3$ 1. Zahl −10 2. Zahl 22

also: −10 22 12 34 46 80

allgemeine Rechnung:

$5+5k$ $13-3k$ $18+2k$ $31-k$ $48+k$ 80

②

f. Lässt man in e. für k auch rationale Zahlen zu, so erhält man rationale Startzahlen

z.B. $k = 0,4$

7 11,8 18,8 30,6 49,4 80

z.B. $k = -\frac{1}{2}$

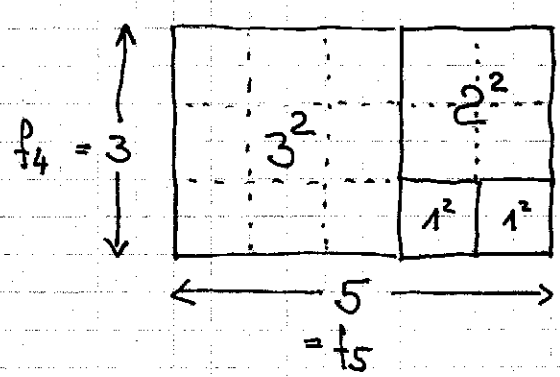
$2\frac{1}{2}$ $14\frac{1}{2}$ 17 $31\frac{1}{2}$ $48\frac{1}{2}$ 80 2

5. b. $n = 4$ $f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + f_4^2 = f_4 \cdot f_5$

$1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2$ $3 \cdot 5$

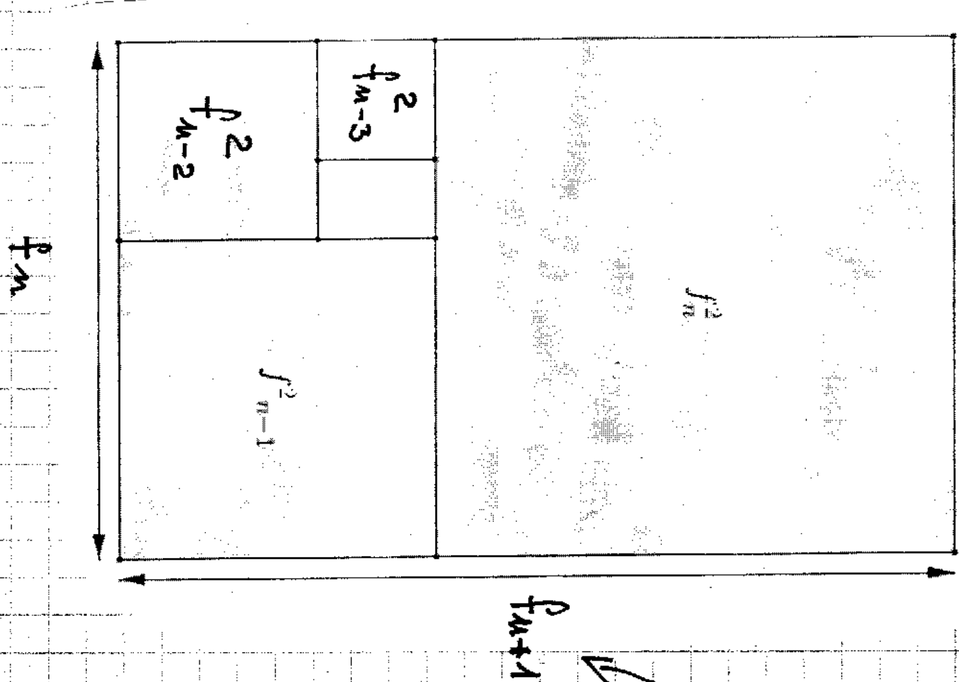
$= 1 + 1 + 4 + 9$ $= 15$

$= 15$ stimmt



1

c



f_{n+1} ergibt sich aus $f_n + f_{n-1}$

1

6. Die Formel heißt

$$f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$$

a) Für $m = 3$ ergibt sich

$$f_{n+3} = f_{n-1} f_3 + f_n f_4 \quad \text{mit } f_3 = 2 \text{ und } f_4 = 3$$

erhält man

$$f_{n+3} = 2 f_{n-1} + 3 f_n$$ 1,5

b) Beweis der letzten Formel

$$\begin{aligned} f_{n+3} &= f_{n+2} + f_{n+1} && \text{Def. der Fibonacci-Z.} \\ &= f_{n+1} + \underbrace{f_n + f_n} + f_{n-1} && \text{"} \\ &= f_n + f_{n-1} + 2 f_n + f_{n-1} \\ &= 3 f_n + 2 f_{n-1} \end{aligned}$$

q.e.d. 1,5

7. Angenommen, es würden zwei Fibonacci-Zahlen aufeinander folgen. Dann wäre auch die nächste Fibonacci-Zahl gerade, denn „gerade plus gerade ist gerade". Ebenso wäre auch die vorhergehende Fibonacci-Zahl gerade, denn aus $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ folgt $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ und „gerade minus gerade ist gerade". Setzt man das fort, müssten alle vorhergehenden Fibonacci-Zahlen gerade sein, insbesondere auch die Startzahlen. Die Startzahlen sind aber 1 und damit ungerade.
Also können nie zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen gerade sein. 2

Σ 19 A7 2 A6 3 A5 2 A4 10 A3 2