

## Übung 1, Lösungen

## PRÄSENZ ÜBUNGEN

$$1. a. \frac{5^{n+1} - 1}{4} - 1 = \frac{5^{n+1} - 1 - 4}{4} = \frac{5^{n+1} - 5}{4}$$

$$= \frac{5(5^n - 1)}{4} = \frac{5}{4} (5^n - 1)$$

b. (1)  $\rightarrow$  (2)  $(n+1)$  wird ausgeklammert

(2)  $\rightarrow$  (3) In der eckigen Klammer

Vor dem  $+$  wird  $n$  in die Klammer mult.  
hinter dem  $+$  wird die Klammer weggelassen und  
 $+1 - 1$  zu  $0$  zusammengefasst

(3)  $\rightarrow$  (4)  $\frac{1}{3}$  ausklammern, das führt am Ende  
der eckigen Klammer zu  $n \rightarrow 3n$

(4)  $\rightarrow$  (5) i.d. eckigen Klammer werden die  $n$ 's  
zusammengezählt

(5)  $\rightarrow$  (6) aus der  $[ ]$  wird  $n$  ausgeklammert

$$c. \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4 - 3} = 4 - 2\sqrt{3}$$

2.  $n$  steht für die mittlere der drei Zahlen.  
 $n-1$  ist die Zahl davor,  $n+1$  die danach.

3 a) z.B. 42 → Quersumme ist  $4+2=6$

$$42 - 6 = 36 \quad 36 : 9 = 4 \quad \text{also teilbar}$$

Ergebnis 4 ist Zehnerziffer von 42.

b) Zweistellige Zahl mit Zehnerziffer  $a$   
und Einerziffer  $b$ :  $10a + b$

$$\text{Quersumme: } a + b$$

$$\begin{aligned} \text{Differenz von beiden: } & 10a + b - (a + b) \\ & = 10a + b - a - b = 9a \end{aligned}$$

Die Differenz ist das Neunfache der Zehnerziffer  $a$ . Teilt man  $9a$  durch 9, was immer aufgeht, so ist das Ergebnis  $a$ .

c) Dreistellige Zahl mit Hunderterziffer  $a$ , Zehnerz.  $b$   
und Einerziffer  $c$ :  $100a + 10b + c$

$$\text{Quersumme: } a + b + c$$

Differenz „Zahl - Quersumme“:

$$\begin{aligned} 100a + 10b + c - (a + b + c) &= 99a + 9b \\ &= 9(11a + b) \end{aligned}$$

Da man 9 ausklammern kann und  $11a + b$  eine ganze Zahl ist, ist <sup>die Differenz</sup> ~~das Ergebnis~~ immer durch 9 teilbar. Das Divisionsergebnis  $11a + b$  ist nicht so übersichtlich.

$$\text{Beispiel } 452 - (4+5+2) = 441 = 9 \cdot 49$$

Das Divisionsergebnis 49 ist  $11 \cdot 4 + 5$   
↑                    ↑  
Hunderter    Zehner

Damit die Differenz auch durch 99 teilbar ist, muss sie durch 9 und zusätzlich durch 11 teilbar sein. Also muss  $11a + b$  durch

11 teilbar sein. Das ist nur für  $b=0$  der Fall.

Beispiel für  $b \neq 0$ :  $452 - (4+5+2) = 441 = 9 \cdot 49$

441 ist durch 9 teilbar, aber nicht durch 11.

Beispiel für  $b=0$ :  $402 - (4+0+2) = 396 = 9 \cdot 44$

Das Divisionsergebnis ist 44,  $= 9 \cdot 11 \cdot 4$   
und 44 kann man durch 11 teilen.

Also kann man 396 durch 99 teilen:  $396 = 99 \cdot 4$

### HAUSÜBUNGEN

4a.  $3 \cdot 3 = 9$      $4 \cdot 4 = 16$      $5 \cdot 5 = 25$     Es kommt noch  
 $2 \cdot 4 = 8$      $3 \cdot 5 = 15$      $4 \cdot 6 = 24$     eine Aufgabe dazu,  
 $1 \cdot 5 = 5$      $2 \cdot 6 = 12$      $3 \cdot 7 = 21$     denn bei 1... (1)  
 $1 \cdot 7 = 7$      $2 \cdot 8 = 16$      $1 \cdot 9 = 9$     hört die Spalte auf (1)

b.  $6 \cdot 6 = 36$      $7 \cdot 7 = 49$      $\left. \begin{matrix} \leftarrow -1 \\ \leftarrow -3 \\ \leftarrow -5 \\ \leftarrow -7 \\ \leftarrow -9 \\ \leftarrow -11 \end{matrix} \right\}$  erkennbare  
 $5 \cdot 7 = 35$      $6 \cdot 8 = 48$     Systematik  
 $4 \cdot 8 = 32$      $5 \cdot 9 = 45$   
 $3 \cdot 9 = 27$      $4 \cdot 10 = 40$   
 $2 \cdot 10 = 20$      $3 \cdot 11 = 33$   
 $1 \cdot 11 = 11$      $2 \cdot 12 = 24$   
 $1 \cdot 13 = 13$      $1 \cdot 13 = 13$     (1)

c.  $n \cdot n = n^2$   
 $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$   
 $(n-2)(n+2) = n^2 - 4$   
 $(n-3)(n+3) = n^2 - 9$   
 $\dots$   
 $1 \cdot (n+n-1) = 2n-1 = n^2 - (n-1)^2$     (1)

d. Es geht hier um die 3. Binomische Formel. (1)

e. In der 1. Spalte ist die oberste Aufgabe 3.3, in der 2. Spalte 4.4, in der 3. Spalte 5.5.

Man zählt also zur Spaltennummer

immer 2 dazu, um die oberste Aufgabe zu ermitteln. Allgemein:  $k$ . Spalte oberste Aufgabe ist  $(k+2) \cdot (k+2)$ . Also beginnt die 80. Spalte mit  $82 \cdot 82$  in der 1. Zeile.

2. Zeile:  $81 \cdot 83$ , 3. Zeile  $80 \cdot 84$ , 4. Zeile  $79 \cdot 85$

Allgemein:  $i$ . Zeile  $(82 - (i-1)) \cdot (82 + (i-1))$

Also steht in der 30. Zeile:  $53 \cdot 111$

①

①

5. Sei  $A$  die Anzahl der Hähne

$E$  " " " Hennen

und  $K$  " " " Küken

a) Dann muss für das ausgegebene Geld gelten:

$$A \cdot 5 + E \cdot 3 + K \cdot 1 = 100$$

Der Bauer kann höchstens 20 Hähne, 33 Hennen oder 100 Küken kaufen.

Nun gibt man eine geringere als die Höchstzahl bei den Hähnen und Hennen vor,

z.B.  $A=10$  und  $E=10$ . Dann rechnet man aus, wie viele Geldstücke ausgegeben wurden.

$$10 \cdot 5 + 10 \cdot 3 = 80$$

Der Rest kann dann in Küken investiert werden. Das Geld immer auf, da ein Küken 1 Geldstück kostet.

$$100 - 80 = 20, \text{ also } \underline{\underline{20 \text{ Küken}}}$$

①

b) Doppelt so viele Küken wie Hähne heißt  
 $k = 2 \cdot A$  Einsetzen i.d. Gleichung:

$$A \cdot 5 + E \cdot 3 + 2 \cdot A \cdot 1 = 100$$

$$7A + 3E = 100$$

Das ist schwieriger zu lösen, denn wenn man die Hähne vorgibt, muss der Rest durch 3 teilbar sein, damit er restlos für die Hennen ausgegeben werden kann.

systematisches Probieren

	A	$k=2A$	$7A$	$100-7A$	E
	1	2	7	93	31
+3	2	4	14	86	geht nicht
	3	6	21	79	"
	4	8	28	72	24
+3	5	10	35	65	geht nicht
	6	12	42	58	"
	7	14	49	51	17
	10	20			10
	13	26			3

Es gibt also insgesamt 5 Lösungen.

6. a.  $r = b + 12$ ,  $r - 12 = b$  und  $r - b = 12$   
 sind richtig (äquivalente Gleichungen)

b.  $r = 3b$  ist richtig

c. Die beiden Gleichungen  $r = b + 12$  und  $r = 3b$   
 kann man gleichsetzen:  $b + 12 = 3b$   
 $\Rightarrow 2b = 12 \Rightarrow b = 6$ , also  $r = 18$

$r=18$  sind 12 mehr als  $b=6$  und  
das Dreifache von  $b=6$ .

1,5

7. a.  $a+1 = m+1+1 = m+2$

b.  $a-2 = m+1-2 = m-1$

c.  $2a = 2(m+1) = 2m+2$

d.  $3a+1 = 3(m+1)+1 = 3m+4$

je Fehler -0,5

e.  $a^2 = (m+1)^2 = m^2 + 2m + 1$

f.  $(a+1)a = (m+1+1)(m+1) = (m+2)(m+1) = m^2 + 3m + 2$

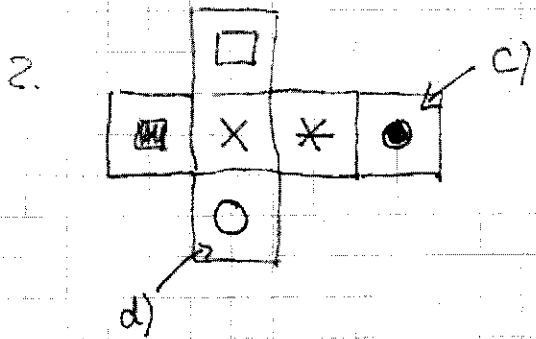
g.  $(a-1)(a+1) = (m+1-1)(m+1+1) = m(m+2) = m^2 + 2m$

3

8.

1. Es sind a) e) f) h)

1



Erst mit d)  $\circ$  festlegen,  
dann mit c)  $\odot$  festlegen,  
dann b) und g) auswerten

1

A4	A5	A6	A7	A8	$\Sigma$
7	3	3	3	2	18