Kapitel 2, Aufgabe 4c

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion über *n*.

Induktionsanfang: $n = 1$

linke Seite: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ rechte Seite: $\frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{6} \cdot 6 = 1$ stimmt

Induktionsschluss von *n* auf *n*+1

Induktionsvoraussetzung: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

Induktionsbehauptung:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{1}{6}(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$

Beweis:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} k^2}_{\text{Induktionsvorauss.}} + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)\left[2n^2 + 7n + 6\right]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \square$$