2.3 Platonische Körper

Für die Schulung des dreidimensionalen Vorstellungsvermögens beschäftigt man sich in der Grundschule schon früh mit Körpern. Quader und Würfel sind hier sicher die einfachsten, geeignetsten. Eine Verallgemeinerung kann sich, schon aus ästhetischen Gründen, zunächst auf die hoch symmetrischen Körper spezialisieren.

Dazu definieren wir zunächst ganz allgemein ein Polyeder.
Ein **Polyeder** ist ein Körper, der durch Ebenen(stücke) begrenzt ist. Durch den gegenseitigen Schnitt der Ebenen entstehen Kanten und Ecken und die Oberfläche setzt sich aus ebenen Vielecken zusammen. An Kanten stoßen immer genau zwei Vielecke aneinander, in Ecken stoßen immer mindestens drei Vielecke zusammen.

Die Platonischen Körper sind nun die regelmäßigsten Polyeder mit hoher Symmetrie. Sie erfüllen die folgenden, definierenden Eigenschaften:

- die begrenzenden Vielecke sind regelmäßige Vielecke
- alle begrenzenden Vielecke sind zueinander kongruent („nur eine Sorte")
- alle Ecken sind gleichartig (kongruent), d.h. läuft man um eine Ecke herum, trifft man stets auf dieselben Vielecke

Diese Eigenschaften lassen insgesamt nur fünf Körper zu, die fünf Platonischen Körper.

Die fünf Platonischen Körper, sortiert nach der Anzahl der begrenzenden Flächen:
Tetraeder, Hexaeder (Würfel), Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder

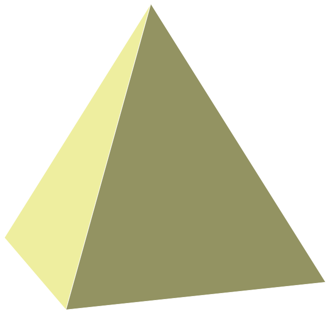
2.3.1 Die fünf Platonischen Körper

Satz
Es gibt genau fünf Platonische Körper

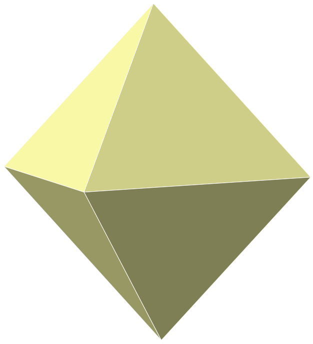
Beweis
Polyeder sind durch zwei Bedingungen beschränkt:
Minimalforderung: In einer Ecke stoßen mindestens drei Vielecke zusammen
Maximalgrenze: Die Summe aller Innenwinkel der in einer Ecke zusammenstoßenden Vielecke muss echt unter 360° liegen.
Da die begrenzenden Vielecke regelmäßig sein sollen, können wir die Möglichkeiten von den kleinen Eckenzahlen systematisch durchgehen.

Die begrenzenden Vielecke sind Dreiecke

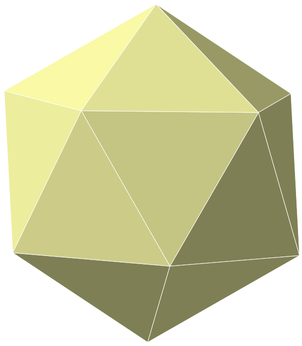
a) Es stoßen 3 Dreiecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel:
$3 \cdot 60° = 180° < 360°$
Damit erfüllt der Körper alle Bedingungen, es ergibt sich das Tetraeder.



b) Es stoßen 4 Dreiecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel:
$4 \cdot 60° = 240° < 360°$
Damit erfüllt der Körper alle Bedingungen, es ergibt sich das Oktaeder.



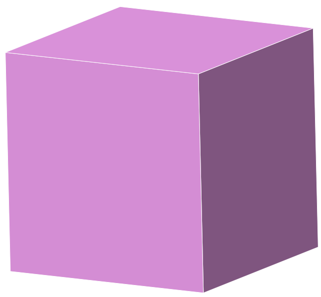
c) Es stoßen 5 Dreiecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel:
$5 \cdot 60° = 300° < 360°$
Damit erfüllt der Körper alle Bedingungen, es ergibt sich das Ikosaeder.



d) Es stoßen 6 Dreiecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel:
$6 \cdot 60° = 360°$
Hier wird die Winkelbedingung nicht eingehalten. Das gilt auch für mehr als 6 Dreiecke in einer Ecke. Also gibt es mit Dreiecken keine weiteren Körper.

Die begrenzenden Vielecke sind Vierecke

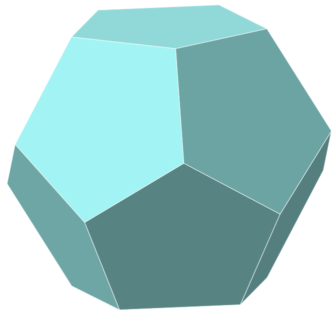
a) Es stoßen 3 Vierecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel:
$3 \cdot 90° = 270° < 360°$
Damit erfüllt der Körper alle Bedingungen, es ergibt sich das Hexaeder, auch Würfel genannt.



b) Es stoßen 4 Vierecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel:

$4 \cdot 90° = 360°$
Hier wird die Winkelbedingung nicht eingehalten. Das gilt auch für mehr als 4 Vierecke in einer Ecke. Also gibt es mit Vierecken keine weiteren Körper.

Die begrenzenden Vielecke sind Fünfecke



a) Es stoßen 3 Fünfecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel:
$3 \cdot 108° = 324° < 360°$
Damit erfüllt der Körper alle Bedingungen, es ergibt sich das Dodekaeder.

b) Es stoßen 4 Fünfecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel:
$4 \cdot 108° = 432°$
Hier wird die Winkelbedingung nicht eingehalten. Das gilt auch für mehr als 4 Fünfecke in einer Ecke. Also gibt es mit Fünfecken keine weiteren Körper.

Die begrenzenden Vielecke sind Sechsecke

Es stoßen 3 Sechsecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel: $3 \cdot 120° = 360°$
Hier wird die Winkelbedingung nicht eingehalten. Das gilt auch für mehr als 3 Sechsecke in einer Ecke. Also gibt es mit Sechsecken keine Körper.

Die begrenzenden Vielecke haben eine Eckenzahl $n \geq 7$

Es stoßen 3 n-Ecke in einer Ecke zusammen
Berechnung der Winkel: $3 \cdot \beta > 3 \cdot 120° = 360°$
Hier wird die Winkelbedingung nicht eingehalten. Das gilt auch für mehr als 3 n-Ecke in einer Ecke. Also gibt es für n-Ecke mit $n \geq 7$ keine Körper.

Damit haben wir alle Möglichkeiten betrachtet und genau fünf Kombinationen gefunden, die Körper zulassen. Das sind die fünf Platonischen Körper und es gibt nur diese fünf.

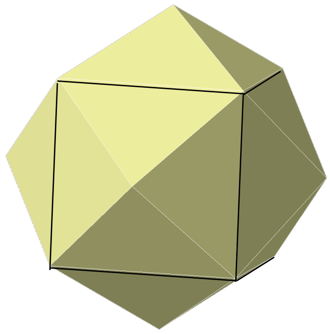
2.3.2 Der Eulersche Polyedersatz

Wir wollen an dieser Stelle einen Satz betrachten, der, wie der Name schon sagt, nicht nur für Platonische Körper gilt, sondern für alle Polyeder. Er lässt sich allerdings an den fünf Platonischen Körpern gut demonstrieren und herleiten.

Der Eulersche Polyedersatz stellt einen Zusammenhang her zwischen den Ecken, Kanten und Flächen von Polyedern. Daher zählen wir diese für die fünf Platonischen Körper aus:

Körper	Flächenzahl F	Eckenzahl E	Kantenzahl K
Tetraeder	4 (3-Ecke)	4	6
Hexaeder	6 (4-Ecke)	8	12
Oktaeder	8 (3-Ecke)	6	12
Dodekaeder	12 (5-Ecke)	20	30
Ikosaeder	20 (3-Ecke)	12	30

Schaut man sich diese Zahlen an, so erkennt man, dass in allen fünf Fällen die Gleichung F + E = K + 2 erfüllt ist.
Diese Gleichung hat eine viel allgemeinere Bedeutung als nur für die Platonischen Körper. Sie gilt für alle Polyeder.
Das wollen wir zunächst an einem weiteren Beispiel zeigen. Die nebenstehende Abbildung zeigt einen Würfel, auf dessen Flächen flache Pyramiden aufgesetzt wurden. Also wurden aus jeder Würfelfläche vier Pyramidenflächen, Damit hat der Körper 24 Flächen. Die acht Würfelecken bleiben erhalten, dazu kommen die Spitzen der Pyramiden über jeder der sechs Würfelflächen. Also hat der Körper 14 Ecken. Die zwölf Würfelkanten bleiben erhalten, dazu kommen über jeder Würfelfläche noch 4 neue Kanten. Das sind insgesamt 12 + 6·4 =36 Kanten. Damit ist E + F = 14 + 24 = 38 und K + 2 = 36 + 2 =38 stimmt damit überein.



Eulerscher Polyedersatz
Für die Eckenzahl *E*, die Flächenzahl *F* und die Kantenzahl *K* gilt in jedem (nicht löchrigen) Polyeder

$$E + F = K + 2$$