1. Goldener Schnitt – Pascalsches Dreieck

1.1 Fibonacci-Zahlen

Fibonacci[1] oder mit richtigem Namen Leonardo von Pisa war ein bedeutender Mathematiker. Er lebte im 12. Jahrhundert (geb. 1190(?)) und war zu seiner Zeit u.a. bekannt für die Einführung des Zehnersystems und seiner Rechenregeln, die für den Aufschwung des Handels wichtige Begleitumstände waren.
Als Sohn von Guido Bonacci, einem Notar am Handelshof der pisanischen Kaufleute in Bougie (Küstenstadt Algeriens/Nordafrika), unternahm er mit seinem Vater diverse Reisen nach Ägypten, Syrien, Griechenland, Sizilien und in die Provence und studierte dort die verschiedenen Varianten der Rechenkunst, die er aber gegenüber der indischen für Irrwege hielt. 1202 kehrt er nach Pisa zurück und stellt im „liber abacci“, einem Mathematikbuch, das alle wichtigen damaligen Erkenntnisse enthielt, das dem damals gebräuchlichen, römischen Zahlensystem überlegene arabische Zahlensystem vor. Als geachteter Magister und auch Steuerschätzer lebt er in der Stadt Pisa bis zu seinem Tod ca. im Jahre 1240.
Erinnert man sich heute an Fibonacci, so denkt man eher an eine spezielle Zahlenfolge, die er als Kaninchen- oder Hasenproblem behandelt hat, oder an den Goldenen Schnitt.
Im Liber abaci erscheint dazu folgende Übungsaufgabe zur Addition:
Ein neugeborenes Hasenpaar wird in einen umzäunten Garten gesetzt. Jedes Hasenpaar erzeugt während seines Lebens jeden Monat ein weiteres Paar. Ein neugeborenes Paar wird nach einem Monat fruchtbar und bekommt somit nach zwei Monaten seine ersten Nachkommen. Es soll angenommen werden, dass die Hasen nie sterben. Wie viele Hasenpaare sind nach einem Jahr in diesem Garten?

Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir die Entwicklung der Hasenpaare in den ersten Monaten

Monat	Alte Kaninchenpaare	Junge Kaninchenpaare	Summe
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8

[1] *(Sohn des Bonacci)Der Name ist eine Erfindung eines Geschichtsschreibers des 19. Jahrhunderts. Leonardo oder einer seiner Zeitgenossen hat diesen Namen nie verwendet.*

Man kann der Tabelle sehr schön das Rechenschema entnehmen, das in Übereinstimmung mit der Aufgabenstellung gilt:
Um eine neue Zeile auszufüllen, schreibt man in die Spalte für die alten Kaninchenpaare die Summe der alten und jungen Kaninchenpaare aus der vorhergehenden Zeile. Denn von den alten Kaninchen überleben alle und die jungen werden zu alten. In die Spalte für die jungen Kaninchenpaare schreibt man die Anzahl der alten aus der vorhergehenden Zeile.
Somit ergibt sich für die Anzahlen der Hasenpaare in der Spalte „Summe“:
$f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_3 = 2$, $f_4 = 3$, $f_5 = 5$, $f_6 = 8$, wobei wir die Bezeichnung mit „f“ hier einführen.
Betrachtet man diese Zahlenfolge genauer, so erkennt man, dass man immer zwei aufeinander folgende Zahlen addiert, um die nächste Zahl zu erhalten. Oder formal und genauer:
$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 2$
Diesen Zusammenhang können wir für die Hasenpaare erläutern.

Monat	Alte Kaninchenpaare	Junge Kaninchenpaare	Summe
n - 1	a	b	$a + b$
n	$a + b$	a	$2a + b$
n + 1	$2a + b$	$a + b$	$3a + 2b$

Von Zeile zu Zeile überleben die alten Kaninchenpaare, zu den alten kommen die vormals jungen, die nun auch alt sind. Die Anzahl der jungen Kaninchen ist gerade die Anzahl der alten Kaninchenpaare im Monat davor.

1.1.1 rekursive Definition der Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen werden rein abstrakt und ohne jeden Sachzusammenhang über das rekursive Bildungsgesetz definiert.
$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \geq 2$ und $f_1 = f_2 = 1$
Unter den Fibonacci-Zahlen versteht man dann die Menge aller Zahlen, die in dieser Folge vorkommen. So ist 34 ein Fibonacci-Zahl, nämlich die 9., dagegen ist 40 keine Fibonacci-Zahl, denn sie wird durch die Zahlenfolge übersprungen.

1.1.2 Fibonacci-Zeichenketten

Die Aufgabe mit den Kaninchen(paaren) kann man etwas ausführlicher formalisieren, indem man für jedes Paar einen Buchstaben schreibt. Für ein altes Kaninchen, das ein junges bekommen kann, schreiben wir `A`, für ein junges `B` (Baby). Dann sieht die anfängliche Entwicklung folgendermaßen aus:

1. Monat B
2. Monat A
3. Monat AB
4. Monat ABA
5. Monat ABAAB

Schauen wir uns die nächsten beiden Monate genauer an.

6. Monat ABAABABA

7. Monat ABAABABAABAAB

6. Monat ABAABABA 5. Monat ABAAB

7. Monat ABAABABAABAAB

Links ist dargestellt, wie sich die Buchstabenkette nach der originalen Fortpflanzungsregel weiterentwickelt. Jedes alte Kaninchen bleibt alt, bekommt aber ein junges – aus A wird AB, was durch die Rahmen um AB hervorgehoben wird. Jedes junge Kaninchen wird ein altes – aus B wird A.

Rechts werden die Zeichenketten nach dem rekursiven Bildungsgesetz zusammengesetzt. D.h. die Zeichenkette des 6. Monats wird abgeschrieben und daran wird die Zeichenkette des vorhergehenden Monats gehängt. Beide so zusammengefügten Zeichenketten ergeben genau dieselbe wie sie links gebildet wurden.

Diese Gesetzmäßigkeit gilt ganz allgemein. Eine nähere Betrachtung dazu würde dann aber doch zu weit führen.

1.1.3 Die explizite Formel für die Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen sind zum einen rein mathematisch interessant mit vielfältigen Eigenschaften. Sie finden aber auch in realen Problemen eine Anwendung. Daher haben Mathematiker neben der mühsamen, rekursiven Berechnung auch nach einer expliziten Formel für die Fibonacci-Zahlen gesucht, also einer Formel, mit der man gezielt höhere Fibonacci-Zahlen berechnen kann, ohne die vorhergehenden berechnen zu müssen. Solch eine Formel wurde erst 1843, also ca. 500 Jahre nach Fibonacci, von dem französischen Mathematiker Binet veröffentlicht.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Erstaunlich an dieser Formel ist, dass bei einer exakten Rechnung (also keine dezimalen Näherungszahlen) alle Terme mit $\sqrt{5}$ sich letztlich herauskürzen und so die Ergebnisse wie verlangt alle natürliche Zahlen sind.

Die zweite Klammer enthält eine Zahl, die zwischen -1 und 0 liegt. Damit wird für gerade n eine positive, für ungerade n eine negative Zahl abgezogen. Da der Betrag kleiner als 1 ist, wird diese Zahl für eine näherungsweise Berechnung immer unbedeutender. So ist z.B.

$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{10} \approx 0{,}00813$. Daher kann man diesen Term vernachlässigen und man erhält eine gute Näherungsformel mit

$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \approx 0{,}4472136 \cdot 1{,}618034^n$. Man muss lediglich das Ergebnis auf die nächste, natürliche Zahl runden.

Beispiel:

Für n = 20 erhält man $f_{20} \approx 0{,}4472136 \cdot 1{,}618034^{20} \approx 6765{,}001$, was vollkommen korrekt $f_{20} = 6765$ liefert. Bei höheren Fibonacci-Zahlen ist es notwendig, dass die Näherungszahlen mit hoher Genauigkeit bestimmt werden.

1.1.4 Eigenschaften der Fibonacci-Zahlen

Auf den ersten Blick wirkt die Fibonacci-Folge sehr unregelmäßig, es gibt bei ihr jedoch eine Fülle interessanter Eigenschaften zu entdecken.

1.1.4.1 Summen

Wir untersuchen zunächst die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen, also $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

Fibonacci-Zahlen	1	1	2	3	5	8	13	21	34
Summe	1	2	4	7	12	20	33	54	88

Schon diese Beispiele lassen vermuten, dass die Summe immer 1 kleiner ist als die übernächste Fibonacci-Zahl. Also

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1}$$

Zum Beweis dieser Formel schreiben wir die rekursive Definitionsgleichung um:

$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ folgt $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$

Also gilt

$f_1 = f_3 - f_2$, $f_2 = f_4 - f_3$, $f_3 = f_5 - f_4$, u.s.w. Addiert man nun alle Gleichungen von f_1 bis f_n, so erhält man auf der linken Seite die Summe der ersten n Fibonacci-Zahlen $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \ldots + f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$.

Auf der rechten Seite ergibt sich

$f_3 - f_2 + f_4 - f_3 + f_5 - f_4 + f_6 - f_5 + \ldots + f_{n+2} - f_{n+1}$. Hier erkennt man, dass sich fast alle Summanden aufheben und letztlich $-f_2 + f_{n+2}$ übrig bleibt. Wegen $f_2 = 1$ lautet die rechte Seite $f_{n+2} - 1$, womit die Formel bewiesen ist.

Als nächste Summe betrachten wir die Summe aller Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index, also $f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + \dots f_{2n-1} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i-1}$.

Auch hier lässt ein einfaches, numerisches Experiment das Ergebnis erahnen.

Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fibonacci-Zahlen	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
Summe (unger. Index)	1		3		8		21		55	

Hier erkennt man sofort das vermutliche Ergebnis: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2n}}$.

Zum Beweis formen wir wieder die rekursive Definitionsgleichung um. $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \Rightarrow f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$

Damit ergeben sich für die einzelnen Fibonacci-Zahlen mit ungeradem Index: $f_3 = f_4 - f_2$, $f_5 = f_6 - f_4$, $f_7 = f_8 - f_6$, ..., $f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$.

Addiert man alle Gleichungen inklusive der zusätzlichen $f_1 = f_2$, so erhält man links die betrachtete Summe. Rechts ergibt sich $f_2 + f_4 - f_2 + f_6 - f_4 + f_8 - f_6 + \dots + f_{2n} - f_{2n-2}$. Auch hier heben sich alle Summanden auf bis auf f_{2n}. Damit ist die Formel bewiesen.

Entsprechend gilt für die Summe der Fibonacci-Zahlen mit geradem Index $\boxed{f_2 + f_4 + f_6 + f_8 + \dots f_{2n} = \sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1}$.

Der Beweis kann auf ganz analoge Weise geführt werden wie die obigen beiden.

Addiert man die Fibonacci-Zahlen mit alternierendem Vorzeichen, so ergibt sich

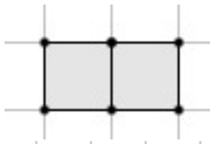
$$\boxed{f_1 - f_2 + f_3 - f_4 + - \dots + (-1)^{n+1} f_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} f_i = (-1)^{n+1} f_{n-1} + 1}$$

Für die Summe der Quadrate der Fibonacci-Zahlen erhält man ebenfalls eine sehr schöne Formel

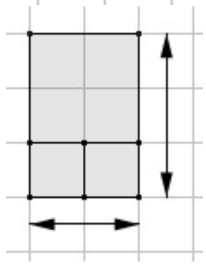
$$\boxed{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + \dots f_n^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}},$$

zu der es eine wunderschöne, aufschlussreiche grafische Veranschaulichung gibt.

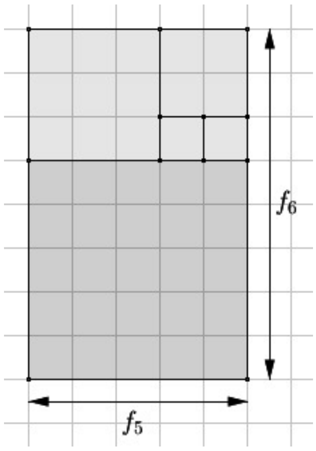
Die ersten beiden Quadrate (n=2), $f_1^2 + f_2^2 = 1^2 + 1^2$, legt man nebeneinander. Sie bilden ein Rechteck mit den Kantenlängen $f_2 = 1$ und $f_3 = 2$.



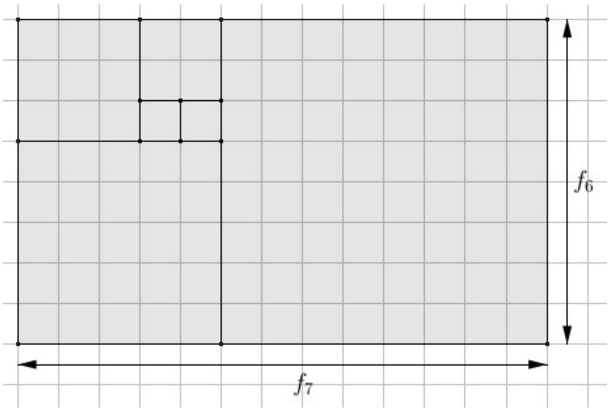
Für n=3 legt man $f_3^2 = 2^2$ nach oben an die Kante der Länge 2. Man erhält wieder ein Rechteck mit den Kantenlängen $f_3 = 2$ und $f_4 = 3$.



Wir springen nun zum Fall n=5. Dazu wurde an die letzte Figur $f_4^2 = 3^2$ nach links und $f_5^2 = 5^2$ nach unten angelegt. Es ergibt sich wieder ein Rechteck, das die Breite des zuletzt angelegten Quadrats hat, also $f_5 = 5$, und eine Höhe, die sich aus den letzten beiden Quadratseiten ergibt. Das ist $f_4 + f_5$, woraus sich nach dem Bildungsgesetz für die Fibonacci-Zahlen f_6 ergibt.



Nach dem gleichen Prinzip wird das Quadrat mit der Kantenlänge $f_5 = 5$ angelegt, um das nächste Rechteck zu bilden.



1.1.4.2 Beziehungen zwischen den Folgegliedern

Das Quadrat einer Fibonacci-Zahl stimmt ungefähr mit dem Produkt der beiden Nachbarzahlen überein. Es unterscheidet sich lediglich um 1, und zwar abwechselnd um Eins zu wenig oder zu viel. Formal aufgeschrieben und genauer formuliert gilt:

$$\boxed{f_n^2 = f_{n-1} \cdot f_{n+1} - (-1)^n}$$

Für die ersten Fibonacci-Zahlen bedeutet das

$f_2^2 = 1^2 = 1 \cdot 2 - 1 \quad f_3^2 = 2^2 = 1 \cdot 3 + 1 \quad f_4^2 = 3^2 = 2 \cdot 5 - 1 \quad f_5^2 = 5^2 = 3 \cdot 8 + 1$

Schon früh hat man nach Formeln gesucht, die das sture, rekursive Berechnen aller vorhergehenden Zahlen vermeidet. Eine schöne, recht allgemeine Formel ist

$$\boxed{f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}}$$

mit der man von einer Fibonacci-Zahl gleich *m* Schritte weitergehen kann. Dieses soll an einem Beispiel erläutert werden.

Zur Berechnung von f_{21} zerlegen wir den Index 21 in 13 + 8. Dann liefert die Formel für $n = 13$ und $m = 8$ $f_{21} = f_{12} f_8 + f_{13} f_9$. Folglich müssen wir die vier kleineren Fibonacci-Zahlen ermitteln: $f_{12} = 144$, $f_{13} = 233$, $f_8 = 21$ und $f_9 = 34$.

Also lautet die Rechnung 144·21 + 233·43 = 10 946 = f_{21}.

Für den Sonderfall $n = m$ liefert die letzte Formel

$$\boxed{f_{2n} = \left(f_{n-1} + f_{n+1}\right) f_n}$$