Dr. Reimund Albers Sommersemester 2013

Mathematisches Denken und Lehren 2

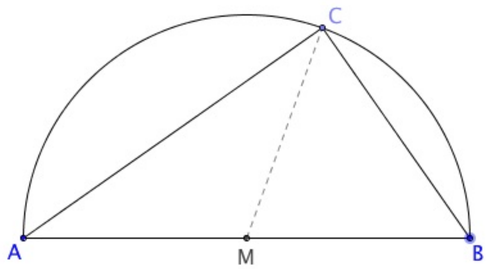
6. Übung
Rechnungen und Konstruktionen am Kreis, Arbelos

Präsenzübungen (für Do 23.5./ Mo 27.5.)

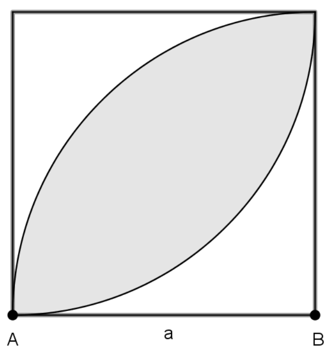
1. Tangentenkonstruktion
   a. Gegeben ist ein Kreis k und ein Punkt P außerhalb des Kreises. Konstruieren Sie die Tangenten, die durch P verlaufen und k berühren.
   Hinweis: Im Berührpunkt sind Radius und Kreistangente senkrecht zueinander. Und denken Sie an den Satz von Thales.
   b. Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2, die sich nicht überlappen.
      i. Machen Sie sich klar, dass es zu diesen Kreisen vier gemeinsame Tangenten gibt.
      ii. Konstruieren Sie wenigstens eine der vier Tangenten.
      Hinweis: Angenommen, k_2 ist kleiner als k_1, also $r_2 < r_1$. Nun schrumpft man den kleineren Kreis auf seinen Mittelpunkt und den größeren Kreis auf den Hilfskreis mit dem Radius $r_1 - r_2$. Dann macht man mit Aufgabe a. weiter.

Hausübungen (Abgabe: Fr, 24.5.)

2. Satz des Thales
   Beweisen Sie den Satz des Thales, d.h. beweisen Sie, dass in der nebenstehenden Figur der Winkel $\sphericalangle ACB$ 90° groß ist.
   Hinweis: Man zeichnet die Hilfslinie $\overline{MC}$. Verwenden Sie nun, dass in gleichschenkligen Dreiecken die Basiswinkel gleich groß sind.

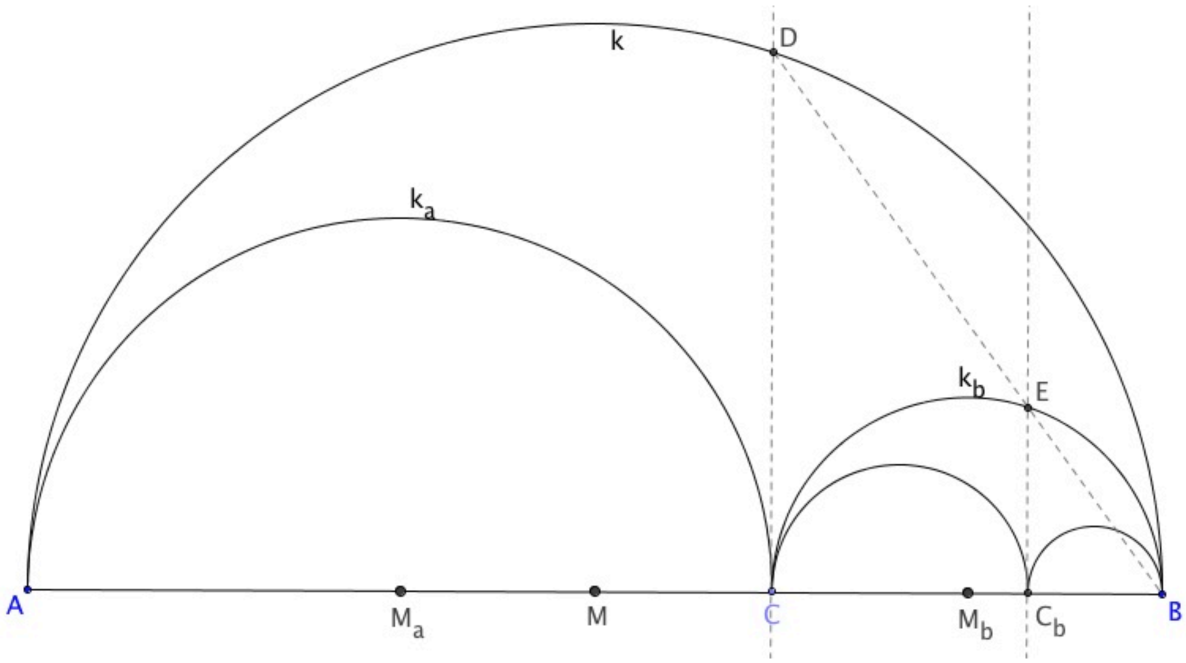


3. Flächenberechnung
   Berechnen Sie den Flächeninhalt der „Linse“ in Abhängigkeit von $|AB| = a$.



4. Arbelos im Arbelos

Gegeben ist ein Arbelos mit den Punkten A, B und C und den Kreisbögen k, k_a und k_b.
Man konstruiert nun weiter (*siehe nachfolgende Zeichnung*):
In C wird die Senkrechte zur Geraden AB gezeichnet, der Schnittpunkt mit k ist D.
Die Strecke $\overline{DB}$ schneidet k_b in E.
Durch E wird die Senkrechte zur Geraden AB gezeichnet, der Schnittpkt. mit $\overline{AB}$ ist C_b.



a. Zeigen Sie, dass C_b die Strecke $\overline{CB}$ im gleichen Verhältnis teilt wie C die Strecke $\overline{AB}$. Formal: $\frac{|C_bB|}{|CC_b|} = \frac{|CB|}{|AC|}$. Verwenden Sie die Radien a und b.

   Hinweis: Sie brauchen die Strahlensätze, über die Sie sich im Skriptanhang (siehe Internetseite der Veranstaltung) informieren können.

b. Zeichnet man über der Strecke $\overline{CB}$ mit Teilungspunkt C_b den Arbelos, so erhält man zum Ausgangsarbelos eine ähnliche, verkleinerte Figur. Wie groß ist der Verkleinerungsfaktor? Verwenden Sie die Radien a und b.

c. Die Fläche des Ausgangsarbelos ist $A = \pi ab$. Wie groß ist die Fläche des kleineren Arbelos über $\overline{CB}$?

d. Konstruieren Sie analog unter k_a den verkleinerten, ähnlichen Arbelos.

   i. Beschreiben Sie die Konstruktion. Nennen Sie den neuen Teilungspunkt C_a.

   ii. Zeigen Sie, dass C_a die Strecke $\overline{AC}$ im gleichen Verhältnis teilt wie C die Strecke $\overline{AB}$.

   iii. Wie groß ist der Verkleinerungsfaktor vom Ausgangsarbelos zum verkleinerten Arbelos über $\overline{AC}$?

   iv. Wie groß ist die Fläche des kleineren Arbelos über $\overline{AC}$?

5. Aufgabe zum räumlichen Vorstellungsvermögen

Versuchen Sie, diese Aufgabe nach Möglichkeit nur in Ihrer Vorstellung zu lösen. Wenn das nicht geht oder Sie unsicher sind, bleibt immer noch die Möglichkeit, ein Modell aus Papier auszuschneiden und es auszuprobieren.

Die Bilder zeigen das Netz eines Dodekaeders und einen Dodekaeder selbst. Im Netz sind fünf Kanten mit A, B, C, D und E gekennzeichnet und eine Fläche mit 1.

a. Markieren Sie im Netz die Kante mit A, die an die mit A markierte Kante stößt. Verfahren Sie entsprechend mit B, C und D.

b. Markieren Sie im Netz die Fläche mit 1, die der mit 1 markierten Fläche gegenüber liegt.