geometrische Reihe für $0 < q < 1$

zB $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdot \quad + \frac{1}{2^{n-1}} \hat{=} a_n$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

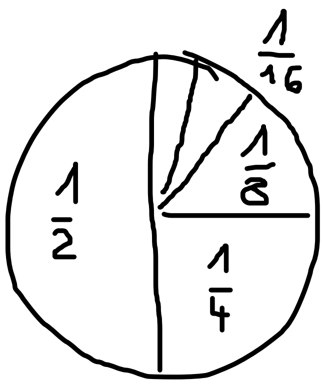
Grenzwert für $n \to \infty$

$$S = a_1 \frac{1}{1-q}$$

Beisp. $a_1 = 1$

$q = \frac{1}{2}$

$$S = 1 \, \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 \cdot 2 = 2$$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$

~~nie~~

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \cdot \cdot \neq \infty$$

$\cdot \frac{1}{10} = q$

$$S = 1 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9} = 1 + \frac{1}{9}$$

$1\frac{1}{9} = 1{,}11111 \ldots$

Was ist $0{,}\overline{27}$ als Bruch?

$0|27|27|2727\ldots$

$$= \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \frac{27}{1000\,000} + \ldots$$

$$q = \frac{1}{100} \qquad S = \frac{27}{100} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{27}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{99}$$

$$= \frac{3}{11}$$

$$0{,}99999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} + \ldots$$

$$a_1 = \frac{9}{10} \qquad q = \frac{1}{10} \qquad S = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{9}$$

$$\underline{\underline{S = 1}}$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots \quad \Big) \cdot 3$$

$$\frac{3}{3} = 0{,}9999\ldots$$

$$\overset{\shortparallel}{1}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

$$a_1 = \frac{1}{4} \quad q = \frac{1}{4} \qquad S = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

Baravelle-Spiralen

Harmonische Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots \longrightarrow \infty$$

Beweis: Abschätzung nach unten

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \ldots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}}_{} + \underbrace{\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}}_{} + \frac{1}{32} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{8}_{2}} + \frac{\cancel{8}^{1}}{\cancel{16}_{2}} + \ldots$$

Man erhält in der Summe immer $\frac{1}{2}$ und das unendlich oft. Also wird die abgeschätzt kleinere Summe unendlich groß, also auch die harmonische Reihe

Ein zweiter Beweis, indirekt

Annahme $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ sei endlich

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$S - \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

$1 > \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$, $\frac{1}{5} > \frac{1}{6}$, $\quad \frac{1}{2} S > \frac{1}{2} S$ ↯