Reihen

Gegeben ist eine Zahlenfolge a
Man bildet eine neue Zahlenf.
S durch

$S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1 + a_2 \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

allgemein: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Beisp. 3 8 13 18 23 . ...

$$S_5 = 3 + 8 + 13 + 18 + 23 = 65$$

rekursive Form

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$$

letztes Beispiel

$$S_6 = S_5 + a_6 = 65 + 28 = 93$$

Herleitung expliziter Formeln für die Sonderfälle arithmetische und geometrische ZF arithmetische Reihe

a ist eine arithmetische ZF $\quad a_{n+1} = a_n + d$ oder $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$+d \qquad -d$

D.h. das Ergebnis ist für alle Klammern gleich

$$2S_n = n \cdot (a_1 + a_n) \;|\; :2 \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Beisp. 3 8 13 18 ...

$$S_6 = \frac{6}{2}(\underset{\uparrow\, a_1}{3} + \underset{\uparrow\, a_6}{28}) = 3 \cdot 31 = 93$$

Gauß: $1 + 2 + 3 + \dots + 100$

$a_n = n \qquad S_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50\ 101$

$= 5050$

Kleine Variation

$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$

$S_n = n a_1 + \frac{n(n-1)}{2} d \qquad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

geometrische Reihe $a_{n+1} = a_n \cdot q$

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \qquad + a_1 q^{n-1}$$

$$q \cdot S_n = \qquad a_1 \cdot q + a_1 q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n$$

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

$$S_n (1-q) = a_1 (1-q^n) \quad \Big| :(1-q) \text{ für } q \neq 1$$

$$S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Beisp 2 6 18 54 162 $\to S_5 = 242$

$$S_5 = 2 \frac{1-3^5}{1-3} = 2 \cdot \frac{1-243}{-2} = 242$$