Dr. R. Albers Mathematisches Denken u. Lehren 2 SoSe 13

9. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNG

1a Da $DC \parallel FI$, ist auch $|CI| = s$

Pyth. in ΔMIF: $|MI|^2 + |IF|^2 = |MF|^2$

$$(a-b+s)^2 + h^2 = (a+b)^2$$

$$\cancel{a^2} + \cancel{b^2} + s^2 + 2as - 2bs - 2ab + h^2 = \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} \quad (1)$$

Pyth. in ΔIBF: $|IB|^2 + |IF|^2 = |BF|^2$

$$(2b-s)^2 + h^2 = (2b)^2$$

$$\cancel{4b^2} - 4bs + s^2 + h^2 = \cancel{4b^2} \quad (2)$$

Nun beide Gleichungen so kombinieren, dass h herausfällt.

(2) $\Rightarrow$ $s^2 + h^2 = 4bs$ Einsetzen in 1

$$4bs + 2as - 2bs - 2ab = 2ab$$

Gleichung nach s auflösen

$$2bs + 2as = 4ab \quad |:2 \text{, s ausklammern}$$

$$(a+b)s = 2ab$$

$$s = \frac{2ab}{a+b}$$

Anm: Das ist gerade das Doppelte des Radius der Archimed. Zwillinge

b. Im ΔMBF darf man den Höhensatz nicht anwenden, da es nicht rechtwinklig ist.

c. Der Punkt E entspricht dem Punkt F wenn man die Rollen von a und b vertauscht.
Das Ergebnis $|FH| = s = 2\frac{ab}{a+b}$ ist symmetrisch bezüglich a und b. Also erhält man für $|EG|$ das gleiche Ergebnis.

HAUSÜBUNGEN

2. a. Das Dreieck CBJ ist rechtwinklig.

Also gilt nach dem Kathetensatz

$$|JB|^2 = |IB| \cdot |CB|$$

$$\left(2\frac{b}{a+b}\sqrt{b(a+b)}\right)^2 = |IB| \cdot 2b$$

$$4\frac{b^2}{(a+b)^2}\, b(a+b) : 2b = |IB|$$

$$2\frac{b^2}{a+b} = |IB| \qquad 1$$

Für die gesuchte Strecke $\overline{CI}$ gilt

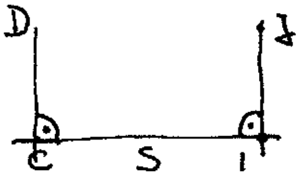
$$|CI| = |CB| - |IB| = 2b - 2\frac{b^2}{a+b}$$

$$= 2b\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) = 2b\,\frac{a+b-b}{a+b}$$

$$|CI| = 2\frac{ab}{a+b} \qquad 1$$

b. Wir nennen zur Abkürzung $2\frac{ab}{a+b} = s$

In 2a haben wir ausgerechnet:



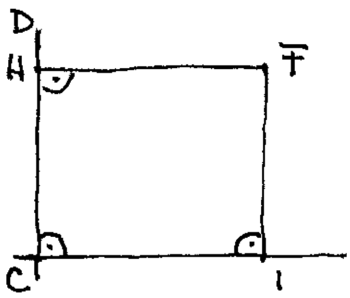
$|CI| = s$

Wegen $CD \perp AB$ und $IJ \perp AB$

$\Rightarrow CD \parallel IJ$

Also ist die Gerade IJ die Parallele zu CD im Abstand s

In 1a wurde ausgerechnet $|HF| = s$



(Wegen $HF \perp CD$ und $CD \perp AB$

$\Rightarrow HF \parallel AB$)

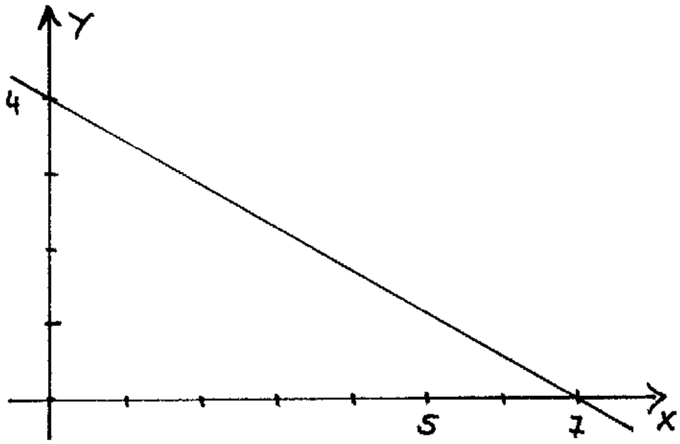
$FI \perp AB$ und $HC \perp AB$

$\Rightarrow FI$ ~~und~~ $\parallel CD$

Also ist die Gerade IF die Parallele zu CD im Abstand s

Damit sind die Geraden $1J$ und $1F$ die gleichen. Damit liegt J auf $1F$ und F auf $1J$. Also liegen alle drei Punkte auf einer Geraden. 2

3. a



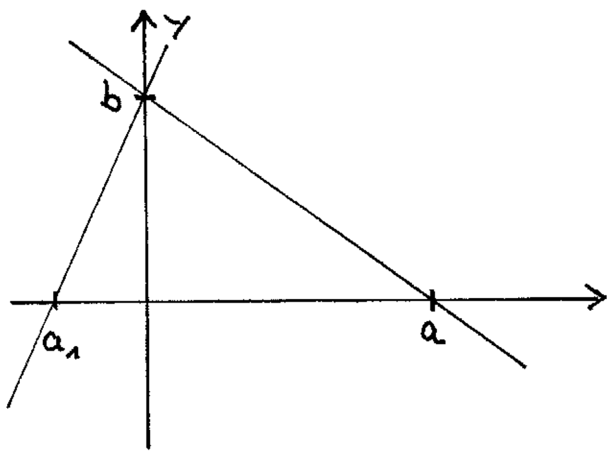
Der y-Achsenabschnitt ist $b = 4$

Die Steigung ist

$$m = -\frac{4}{7}$$

Also $y = -\frac{4}{7}x + 4$ 1

b.



i Die Steigung ist

$$m = -\frac{b}{a}$$ 1

(Ist a negativ und b positiv, so ist m positiv.)

ii.
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \quad \Big| -\frac{x}{a}$$

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a} \quad \Big| \cdot b$$

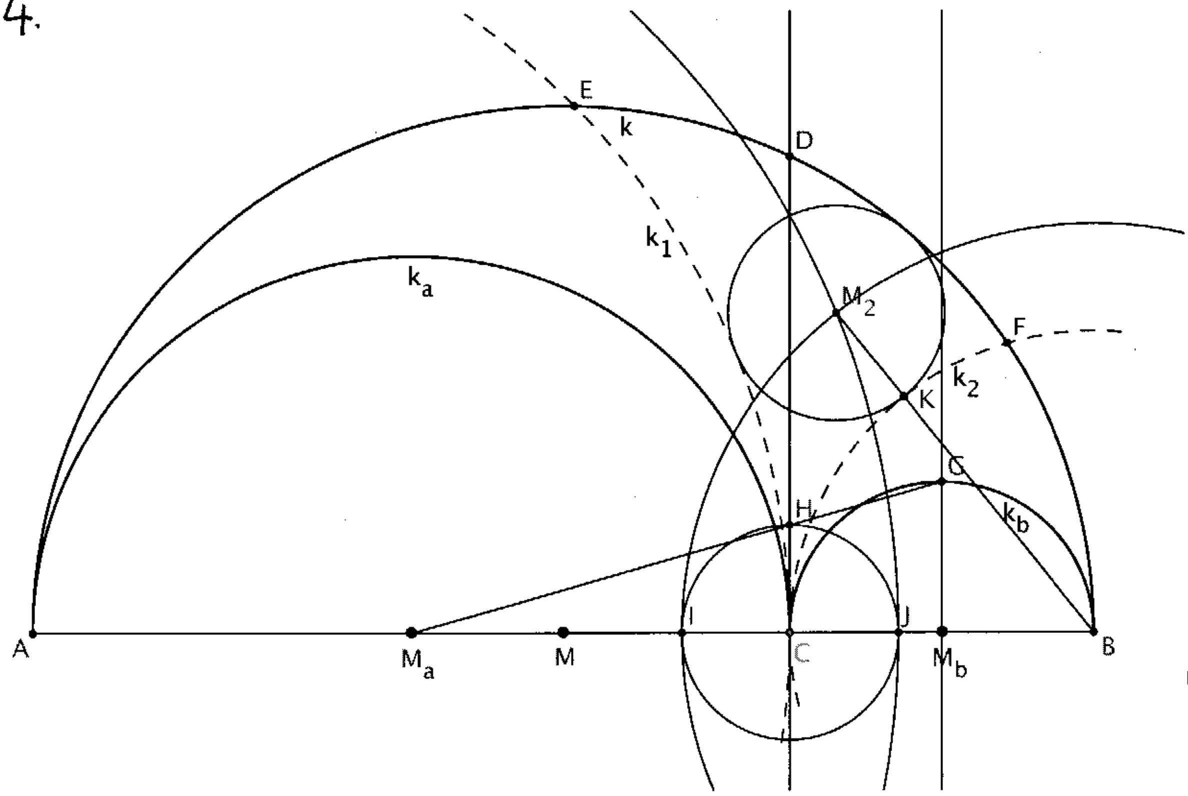
$$y = b - \frac{x}{a} \cdot b$$

$$y = \underbrace{-\frac{b}{a}}_{\text{Steigung } m} x + b$$

y-Achsenabschnitt

Bringt man die Gleichung auf die Form $y = mx + b$ so erkennt man, dass beide Größen richtig sind. 2

4.



4

Gegeben ist der Arbelos mit den Bögen k_a, k_b und k und den Punkten A, B, C, M, M_a und M_b.

Senkrechte zu AB durch C, Schnitt mit k ist D

" " " " M_b, " " k_b ist G

Die Strecke $\overline{M_a G}$ schneidet CD in H

|CH| ist der gesuchte Radius

Kreis um C mit Radius |CH|. Schnitt mit AB sind I und J

Kreis um A mit Radius |AJ|
Kreis um B mit Radius |BI| } Schnitt ist M_2

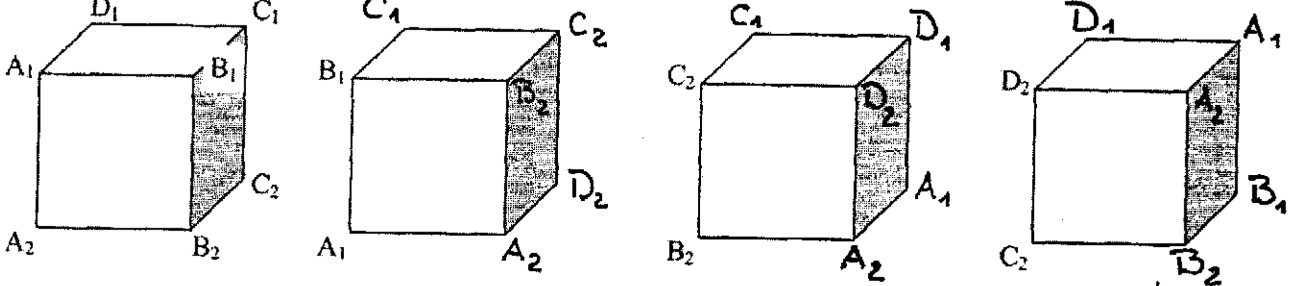
Der Kreis um M_2 mit dem Radius |CH| ist der gesuchte Kreis.

alternativ:

Die Strecke M_2B schneidet k_2 im Punkt K.

Der Kreis um M_2 mit dem Radius $|M_2K|$ ist der gesuchte Kreis.

5.



je $\frac{1}{2}$