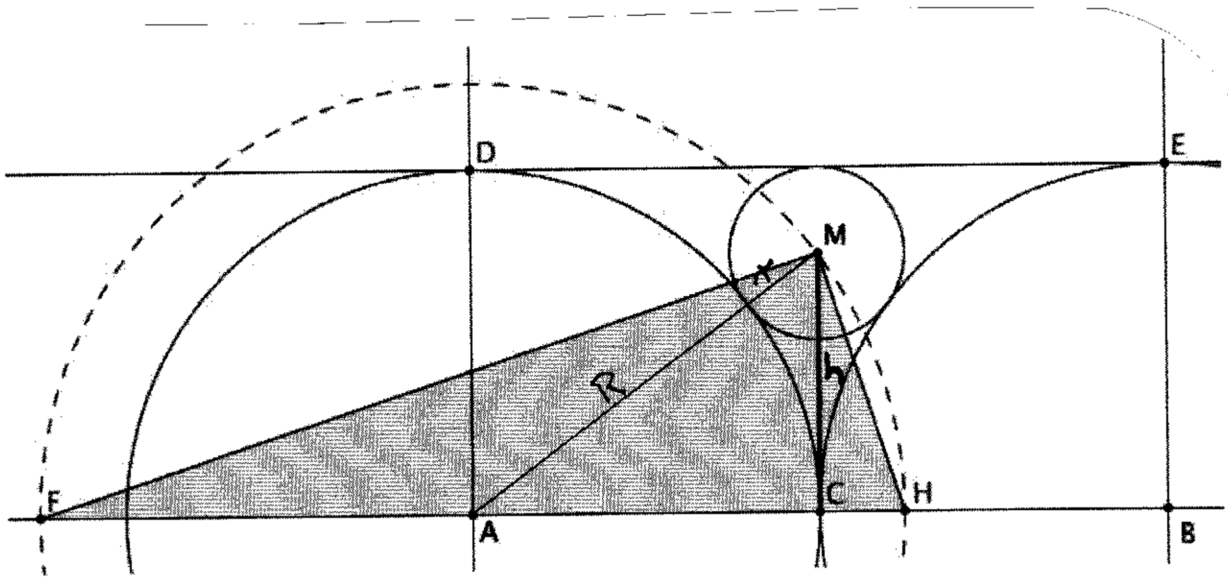
8. Übung, Lösungen

PRÄSENZÜBUNG

1. a



Die (großen) Kreise um A und B sind gegeben, der kleine Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r ist gesucht.

M liegt (irgendwo) auf dem Kreis um A mit dem Radius $R+r$ (gestrichelt). Dieser Kreis hat mit der Geraden AB die Schnittpunkte F und H. Also ist das Dreieck FHM rechtwinklig (Satz von Thales).

In diesem Dreieck gilt nach dem Höhensatz:

$$h^2 = |FC| \cdot |CH| = (2R + r) \cdot r$$

Wegen der Berühreigenschaft zur Geraden DE gilt $h + r = R \Rightarrow h = R - r$

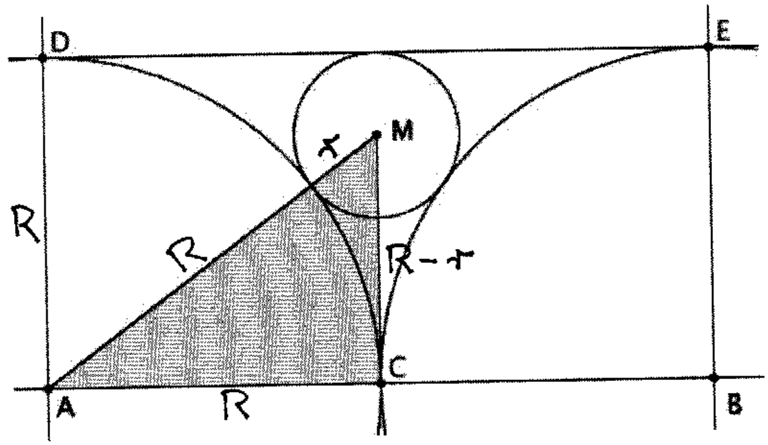
Also $(R-r)^2 = (2R+r) \cdot r$

$$R^2 - 2Rr + r^2 = 2Rr + r^2$$

$$-4Rr = -R^2$$

$$r = \frac{R}{4}$$

b. Ein alternativer Ansatz ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ACM mit dem Satz von Pythagoras.



$$R^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$$

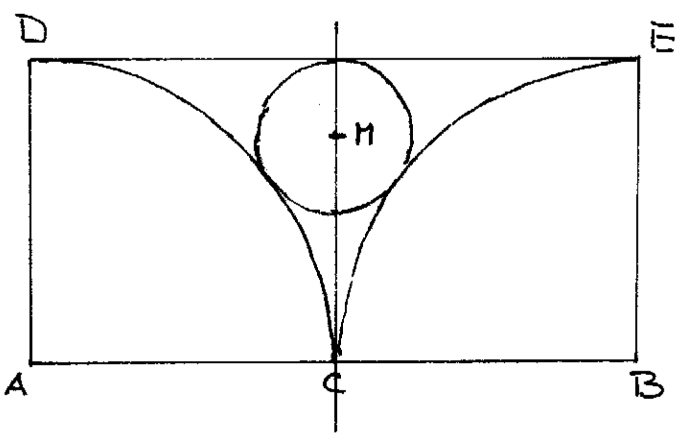
$$R^2 + \cancel{R^2} - 2Rr + \cancel{r^2} = \cancel{R^2} + 2Rr + \cancel{r^2}$$

$$R^2 = 4Rr$$

$$r = \frac{R}{4}$$

(Dieser Ansatz ist deutlich einfacher und nähe~~r~~liegender)

c. Das Rechteck ABED mit $|AB| = 2R$ und $|BE| = R$ ist vorgegeben mit den Kreisen um A und B mit dem Radius R



Wegen der Symmetrie der Figur liegt M auf der Senkrechten zu AB durch C. Zum gegebenen R wird $r = \frac{R}{4}$ konstruiert.

M hat von der Geraden DE den Abstand r.

HAUSÜBUNGEN

2. Bekannt ist $|AM_a| = |M_a C| = a$, $|CM_b| = |M_b B| = b$

$|CD|$ Nach dem <u>Höhensatz</u> gilt:

$$|CD|^2 = 2a \cdot 2b = 4ab$$

$$|CD| = 2\sqrt{ab}$$

$|AD|$ Nach dem <u>Satz von Pythagoras</u> gilt im ΔACD

$$(2a)^2 + (2\sqrt{ab})^2 = |AD|^2$$

$$4a^2 + 4ab = |AD|^2$$

$$|AD| = 2\sqrt{a^2+ab} = 2\sqrt{a(a+b)}$$

$|AE|$ Nach dem <u>1. Strahlensatz</u> gilt (Zentrum A)

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2a}{2(a+b)}$$

$$|AE| = \frac{a}{a+b} \cdot |AD| = \frac{a}{a+b} \cdot 2\sqrt{a(a+b)}$$

$$|AE| = 2a\frac{\sqrt{a(a+b)}}{a+b} = 2\frac{a}{a+b}\sqrt{a(a+b)}$$

$|ED|$

$$|ED| = |AD| - |AE|$$

$$= 2\sqrt{a(a+b)} - 2\frac{a}{a+b}\sqrt{a(a+b)}$$

$$= 2\sqrt{a(a+b)}\left[1 - \frac{a}{a+b}\right]$$

$$= 2\frac{b}{a+b}\sqrt{a(a+b)}$$

je geforderter Strecke 1

$|EC|$ Nach dem <u>Satz von Pythagoras</u> gilt im ΔACE

$$|AE|^2 + |EC|^2 = |AC|^2$$

$$|EC|^2 = (2a)^2 - \left(2\frac{a}{a+b}\sqrt{a(a+b)}\right)^2$$

$$= 4a^2 - 4\frac{a^2}{(a+b)^{\cancel{2}}}\, a\cancel{(a+b)}$$

$$= 4a^2\left[1 - \frac{a}{a+b}\right] = 4a^2\frac{b}{a+b}$$

$$|EC| = 2a\sqrt{\frac{b}{a+b}} = 2\frac{a}{a+b}\sqrt{b(a+b)}$$

$|EG|$ Nach dem <u>2. Strahlensatz</u> (Zentrum A) gilt:

$$\frac{|EG|}{|CD|} = \frac{|AE|}{|AD|} \Rightarrow |EG| = \frac{|AE|}{|AD|} \cdot |CD|$$

$$|EG| = \frac{\cancel{2}\frac{a}{a+b}\cancel{\sqrt{a(a+b)}}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{a(a+b)}}} \cdot 2\sqrt{ab}$$

$$= 2\frac{a}{a+b}\sqrt{ab}$$

$|EF|$ $\overline{EF}$ ist eine Diagonale im Rechteck CFDE und daher so lang wie die andere Diagonale $\overline{CD}$. Also $|EF| = 2\sqrt{ab}$

$|FD|$ $\overline{FD}$ ist im Rechteck CFDE die gegenüberliegende Seite zu $\overline{EC}$. Also

$$|FD| = |EC| = 2\frac{a}{a+b}\sqrt{b(a+b)}$$

$|BD|$ Nach dem <u>Kathetensatz</u> gilt im $\triangle ABD$.

$$|BD|^2 = |CB| \cdot |AB|$$

$$= 2b \cdot 2(a+b) = 4b(a+b)$$

$$|BD| = 2\sqrt{b(a+b)}$$

$|FB|$

$$|FB| = |BD| - |FD|$$

$$= 2\sqrt{b(a+b)} - 2\frac{a}{a+b}\sqrt{b(a+b)}$$

$$= 2\sqrt{b(a+b)}\left[1 - \frac{a}{a+b}\right]$$

$$|FB| = 2\frac{b}{a+b}\sqrt{b(a+b)}$$

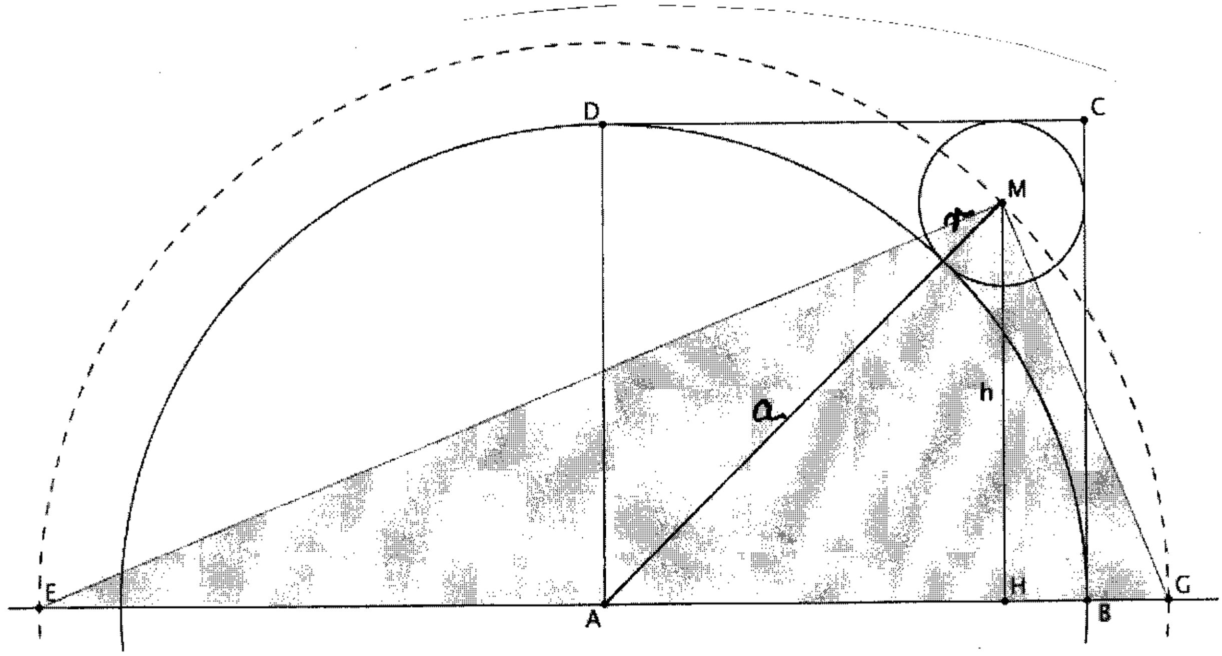
$|FH|$ Nach dem <u>2. Strahlensatz</u> (Zentrum B) gilt:

$$\frac{|FH|}{|CD|} = \frac{|FB|}{|BD|} \Rightarrow |FH| = \frac{|FB|}{|BD|} \cdot |CD|$$

$$|FH| = \frac{\cancel{2}\frac{b}{a+b}\cancel{\sqrt{b(a+b)}}}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{b(a+b)}}} \cdot 2\sqrt{ab} = 2\frac{b}{a+b}\sqrt{ab}$$

$\boxed{9}$

3. Ansatz über den Höhensatz



Um A wird ein Kreis mit dem Radius $a+r$ geschlagen, auf dem der Mittelpunkt des gesuchten Kreises liegt. Die Schnittpunkte dieses Kreises mit der Geraden AB sind E und G. Dann ist nach dem Satz von Thales das Dreieck EGM rechtwinklig und es gilt nach dem Höhensatz

$$|HM|^2 = |HE| \cdot |HG|$$

$$h^2 = (2a) \cdot 2r \qquad 1$$

Wegen der Berührbedingung mit der Geraden CD gilt $h = a - r$. Einsetzen

$$(a-r)^2 = 4ar$$

$$a^2 - 2ar + r^2 = 4ar$$

$$r^2 - 6ar + a^2 = 0 \quad \text{quadratische Gleichung in } r$$

$$r = 3a \pm \sqrt{9a^2 - a^2}$$

$$= 3a \pm 2a\sqrt{2} \qquad 1$$

$r = 3a + 2a\sqrt{2}$ ist keine sinnvolle Lösung des geometrischen Problems

$$r = 3a - 2a\sqrt{2} = a(3-2\sqrt{2}) \approx 0{,}1716\,a$$

ist die gesuchte Lösung (1)

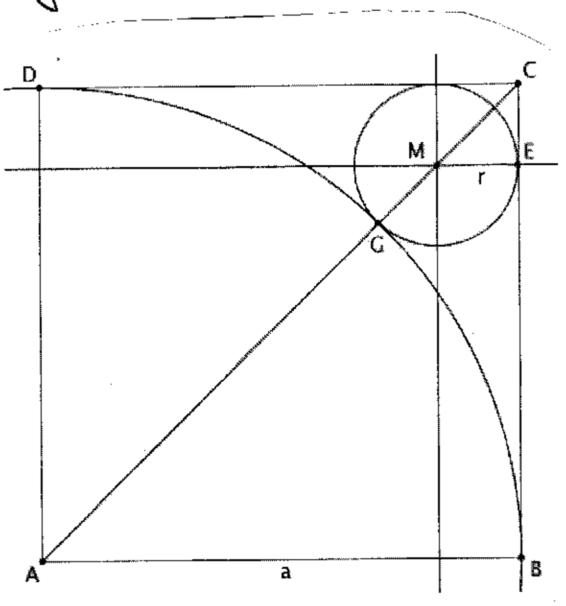
Alternativer Lösungsweg

Die Diagonale $\overline{AC}$ kann man zusammensetzen durch

$$|AC| = |AG| + |GM| + |MC|$$

Mit der Formel für die Diagonale d im Quadrat mit der Kantenlänge k

$d = k\sqrt{2}$ gilt



$$a\sqrt{2} = a + r + r\sqrt{2}$$

$$a(\sqrt{2}-1) = r(1+\sqrt{2})$$

$$r = a\,\frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = a\,\frac{\sqrt{2}-2-1+\sqrt{2}}{1-2}$$

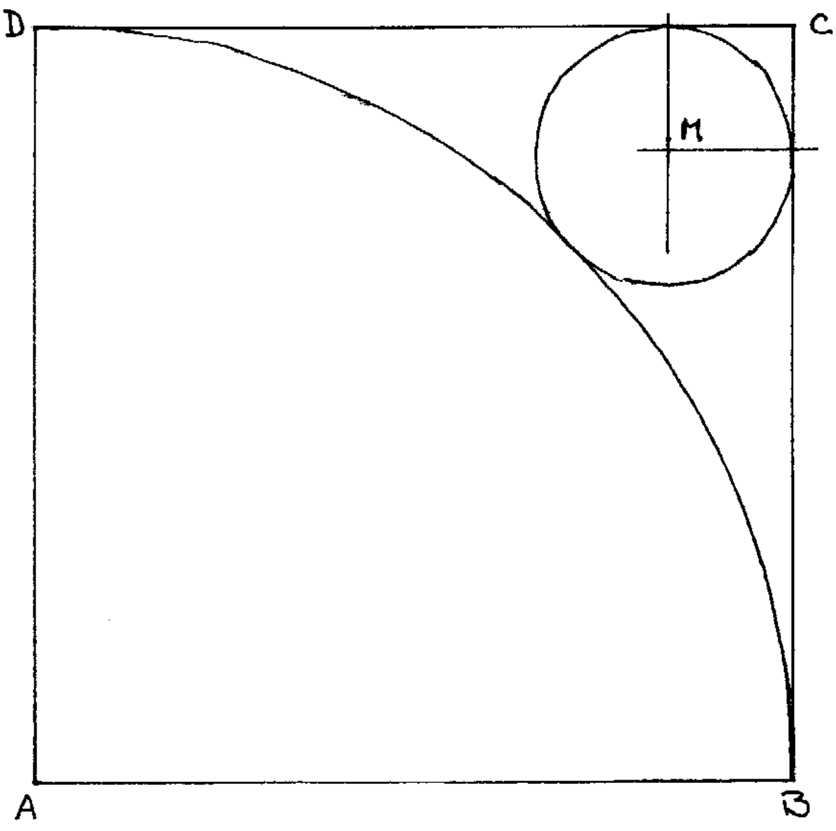
$$r = a(3-2\sqrt{2}) \approx 0{,}1716\,a$$

(3)

b. $a = 10$ cm

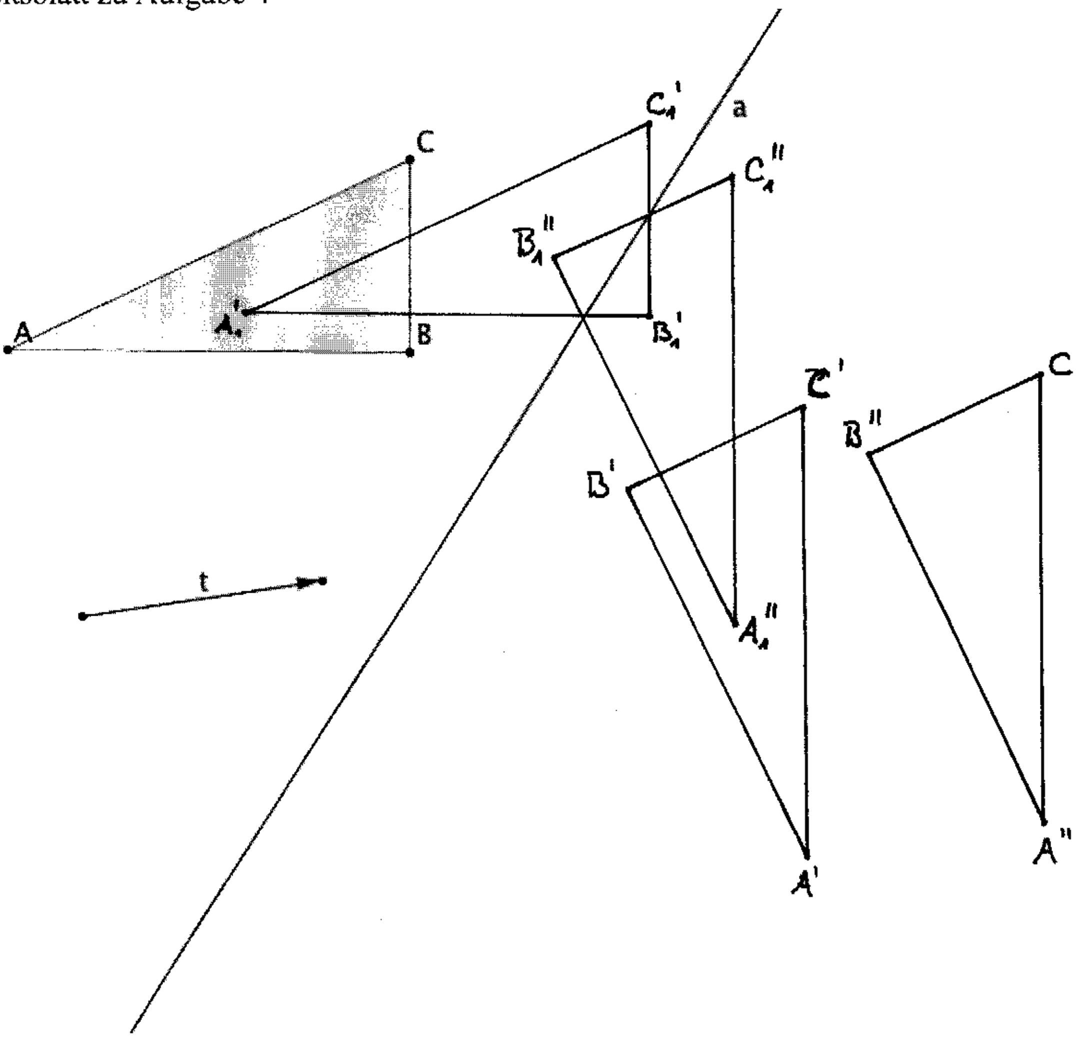
$r \approx 1{,}72$ cm

Man zeichnet zu BC und CD Parallelen im Abstand von r. Ihr Schnittpunkt ist M.



(2)

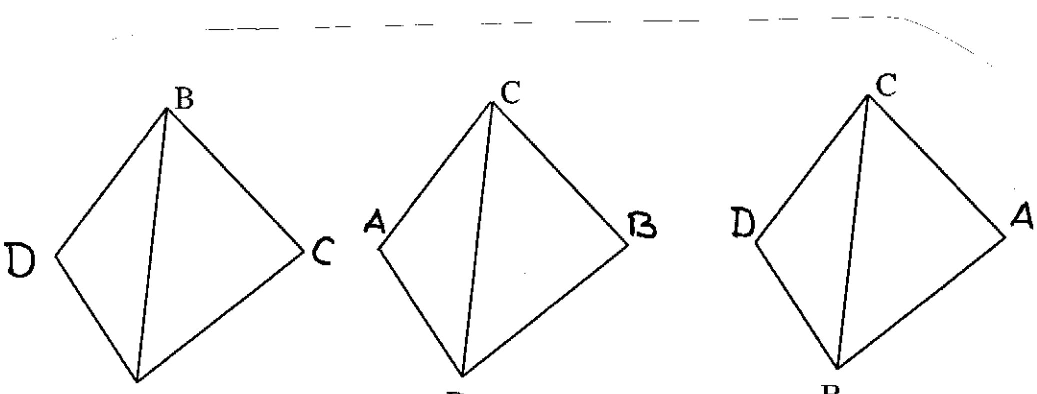
Arbeitsblatt zu Aufgabe 4



Die beiden Enddreiecke stimmen nicht überein.
Die beiden Abbildungen sind nicht kommutativ.

2

Aufg 5



je $\frac{1}{2}$ 1,5

A2	A3	A4	A5	Σ
9	5	2	1,5	17,5