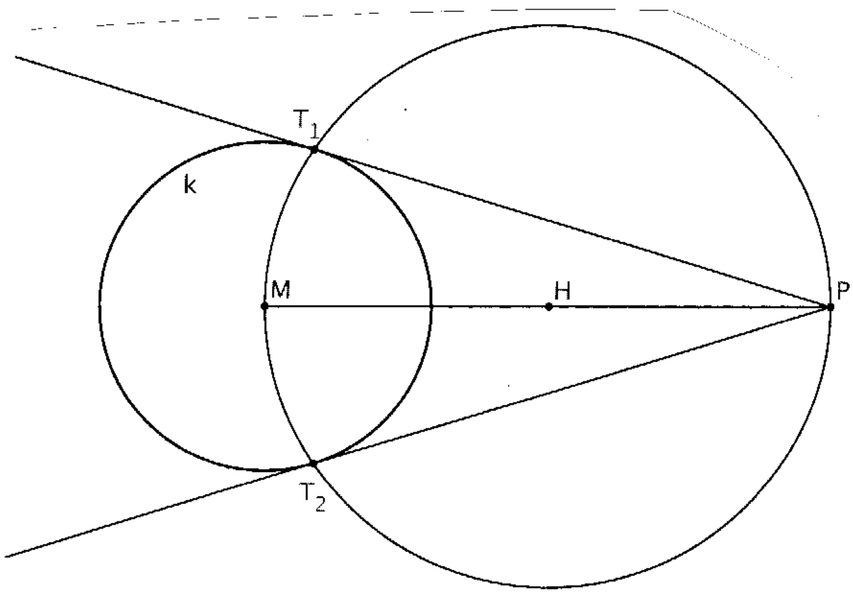
Dr. R. Albers   Mathematisches Denken u. Lehren 2   SoSe 13

6. Übung, Lösungen

1. a.

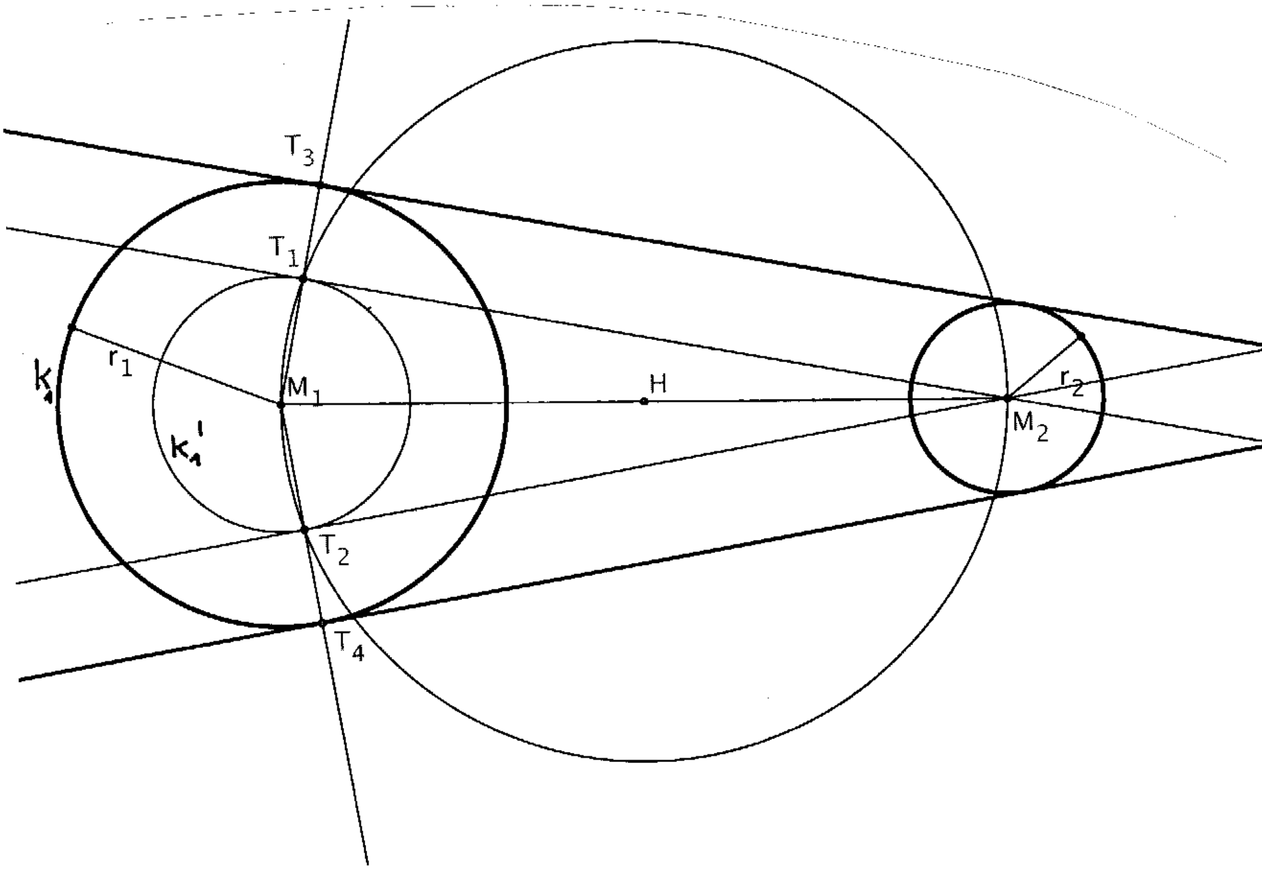


Wir konstruieren die Berührpunkte T_1 und T_2 der beiden Tangenten. Da bei T_1 und T_2 rechte Winkel zwischen Radius (nicht gezeichnet) und der Tangente sind, läuft die Konstruktion über den Satz von Thales.

- H ist der Mittelpunkt von $\overline{MP}$
- Der Kreis um H mit dem Radius $|HM|$ ist der Thaleskreis zur Strecke $\overline{MP}$
- Die Schnittpunkte dieses Kreises mit k sind die gesuchten Punkte T_1 und T_2
- Die Geraden PT_1 und PT_2 sind die gesuchten Tangenten durch P an k.

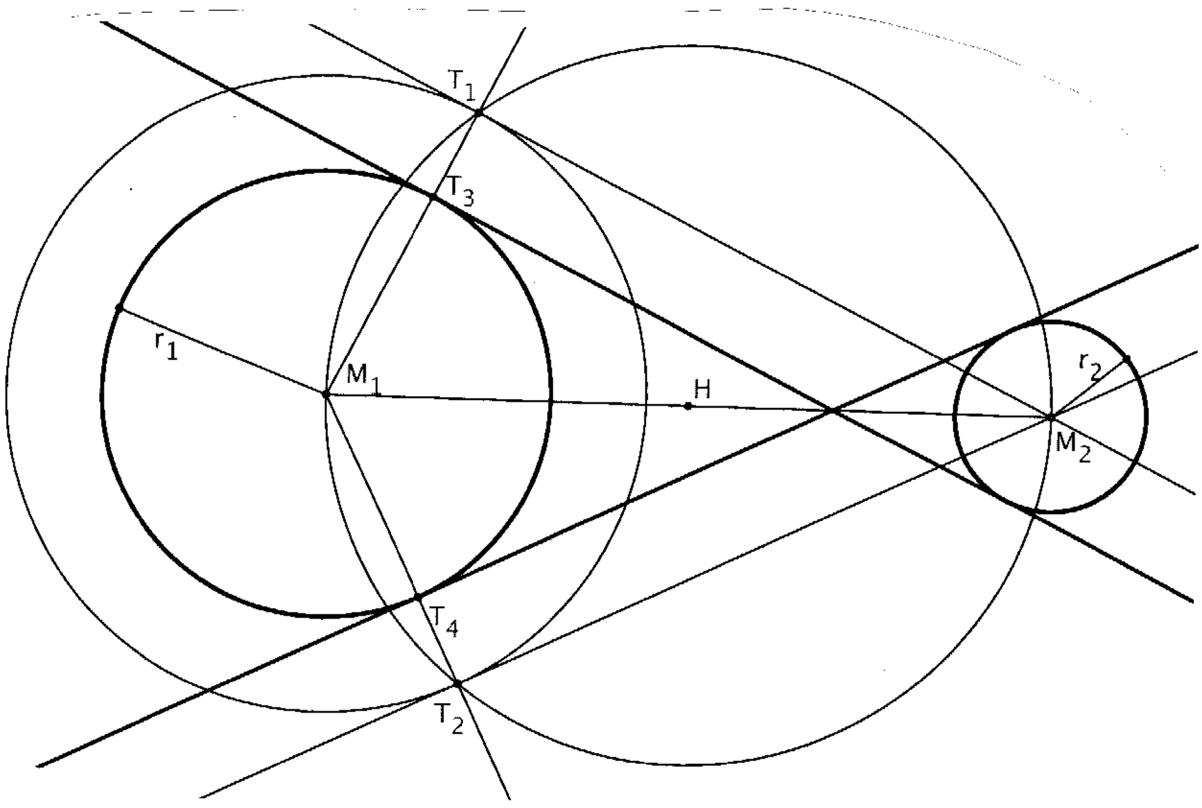
b. Gegeben sind die Kreise k_1 um M_1 mit Radius r_1 und k_2 um M_2 mit Radius r_2 $(r_2 < r_1)$.

- Zeichne den Kreis k_1' um M_1 mit dem Radius $r_1 - r_2$
- Konstruiere nach a. die Tangenten, die durch M_2 verlaufen und k_1' berühren. Die Berührpunkte sind T_1 und T_2



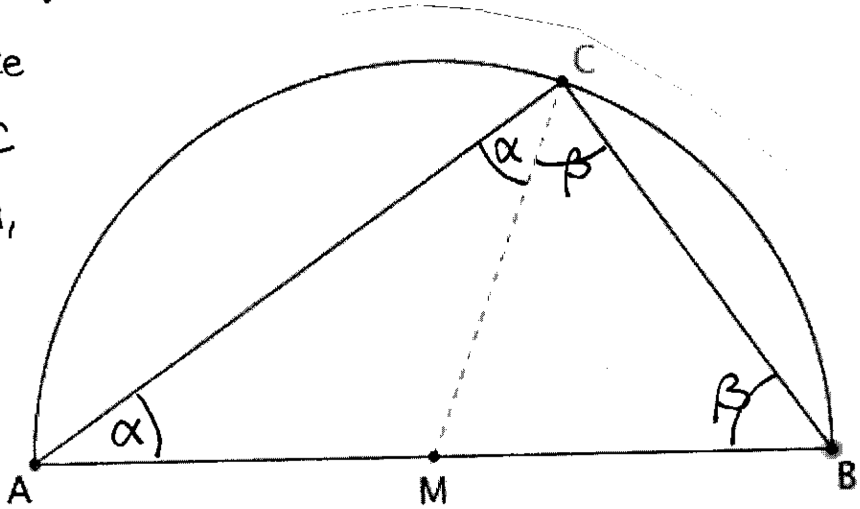
- Der Strahl von M_1 über T_1 hinaus schneidet k_1 in T_3.
- Der Strahl von M_1 über T_2 hinaus schneidet k_1 in T_4
- Die Parallele zu T_1M_2 durch T_3 ist eine gesuchte Tangente, die Parallele zu T_2M_2 durch T_4 eine weitere.

Zwei weitere Tangenten erhält man, wenn man mit dem Hilfskeis k_1' (Mittelpunkt M_1, Radius $r_1 + r_2$) die ausonsten



gleiche Konstruktion durchführt.

HAUSÜBUNGEN



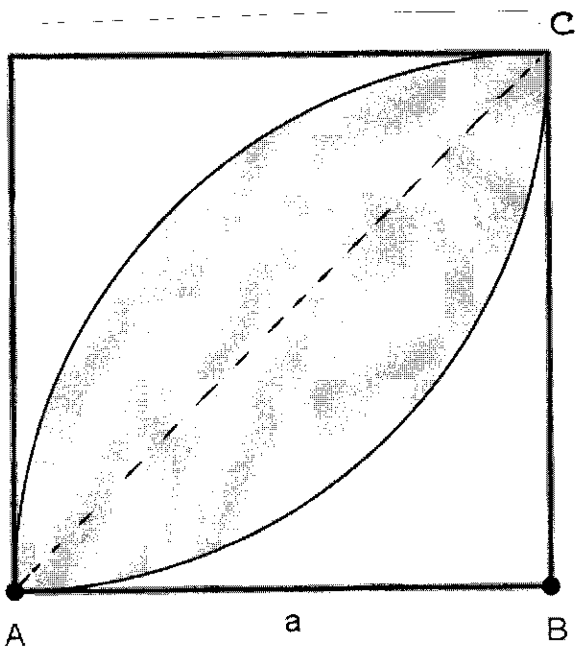
2. Die Teildreiecke ΔAMC und ΔMBC sind gleichschenklig, da $|AM| = |MB| = |MC|$ Radien des Kreises sind

Sind wie üblich die Winkel bei A α und bei B β, so ist (1)

$|\sphericalangle ACM| = \alpha$ und $|\sphericalangle MCB| = \beta$. Dann gilt im ΔABC:

$\alpha + \beta + \beta + \alpha = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

Der Winkel $\sphericalangle ACB$ hat die Größe $\alpha + \beta$, also 90°. (1)



3. Die halbe Linse erhält man, wenn man vom Viertelkreis das halbe Quadrat (ΔABC) abzieht.

Also

$$\frac{A_L}{2} = \frac{1}{4}\pi a^2 - \frac{1}{2} a^2$$ (1)

$$= \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) a^2$$

Also $A_L = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) a^2 = \underline{\underline{\left(\frac{1}{2}\pi - 1\right) a^2}}$ (1)

$\approx 0{,}571\, a^2$

4. a. Nach dem 1. Strahlensatz mit Zentrum B gilt (C_bE und CD sind die Parallelen)

$$\frac{|C_bB|}{|CC_b|} = \frac{|BE|}{|DE|} \quad (1)$$

1

Ebenfalls nach dem 1. Strahlensatz mit Zentrum B und den Parallelen CE und AD gilt

$$\frac{|BE|}{|DE|} = \frac{|CB|}{|AC|} \quad (2)$$

Die Kombination von (1) mit (2) liefert $\dfrac{|C_bB|}{|CC_b|} = \dfrac{|CB|}{|AC|}$. $\square$

1

b. $|AB| = 2a + 2b = 2(a+b)$

$|CB| = 2b$

Die Gesamtstrecke $\overline{AB}$ wird auf die Gesamtstrecke $\overline{CB}$ verkürzt, also ist der Verkürzungsfaktor $\underline{\underline{s = \dfrac{b}{a+b}}}$

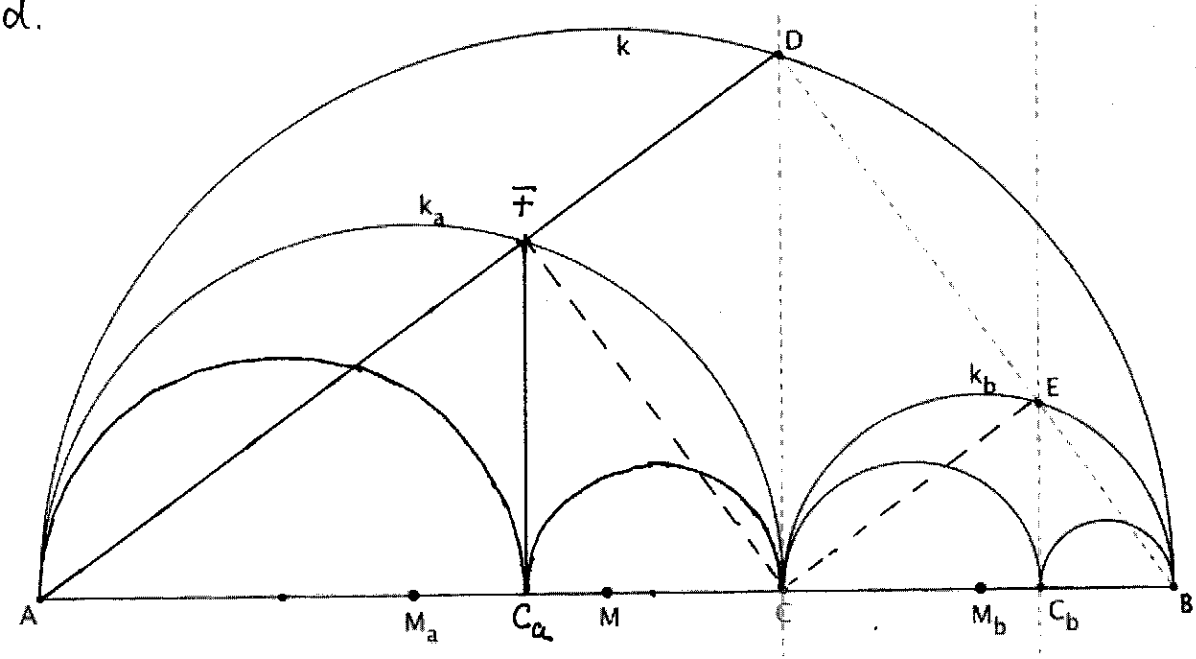
1

c. Der Flächeninhalt wird mit s^2 skaliert. Also ist der Flächeninhalt des Arbelos über $\overline{CB}$

$$A_b = \pi a b \frac{b^2}{(a+b)^2} = \underline{\underline{\frac{\pi a b^3}{(a+b)^2}}}$$

1

d.



1

i. - Zeichne die Strecke $\overline{AD}$, der Schnittpunkt mit k_a ist F.
- Fälle von F das Lot auf AB. Der Lotfußpunkt ist C_a (1)

ii. Zu zeigen ist: $\frac{|C_aC|}{|AC_a|} = \frac{|CB|}{|CA|}$

Nach dem 1. Strahlensatz mit Zentrum A und den Parallelen C_aF und CD gilt

$$\frac{|C_aC|}{|AC_a|} = \frac{|FD|}{|AF|} \quad (3)$$ (1)

Ebenfalls nach dem 1. Strahlensatz mit Zentrum A und den Parallelen FC und DB gilt

$$\frac{|FD|}{|AF|} = \frac{|CB|}{|CA|} \quad (4)$$

Die Kombination von (3) und (4) liefert $\frac{|C_aC|}{|AC_a|} = \frac{|CB|}{|CA|}$ □

(1)

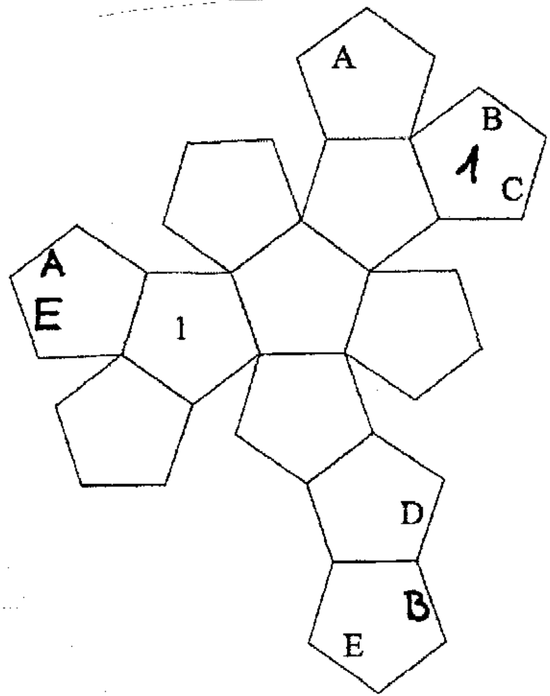
iii. Die Gesamtstrecke $\overline{AB}$ wird verkürzt auf die Gesamtstrecke $\overline{AC}$. Längen: $2(a+b) \rightarrow 2a$

Also ist der Verkürzungsfaktor $s = \frac{a}{a+b}$ (1)

iv. Wenn die Längen mit s skaliert werden, wird der Flächeninhalt mit s^2 skaliert.

$$A_a = \pi ab \cdot s^2 = \frac{\pi a^3 b}{(a+b)^2}$$ (1)

5.



C und D stoßen zusammen

profehler $-\frac{1}{2}$ 2

A2	A3	A4	A5	Σ
2	2	10	2	16