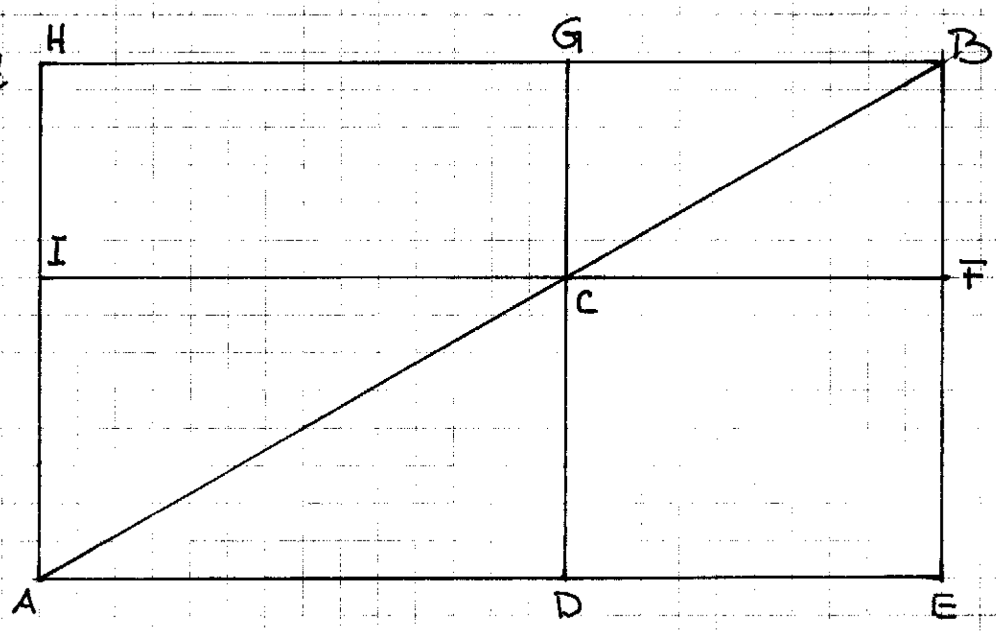
5. Übung Lösungen

PRÄSENZÜBUNGEN

1. Die Diagonale $\overline{AB}$ teilt das Rechteck AEBH in zwei gleich große Dreiecke. Ebenso werden die beiden hellen Rechtecke ADCI und CFBG in flächengleiche Dreiecke geteilt.
Die (grauen) Rechtecke ergeben sich jeweils als Differenz des großen Dreiecks minus die beiden kleineren Dreiecke. Also haben beide den gleichen Flächeninhalt.

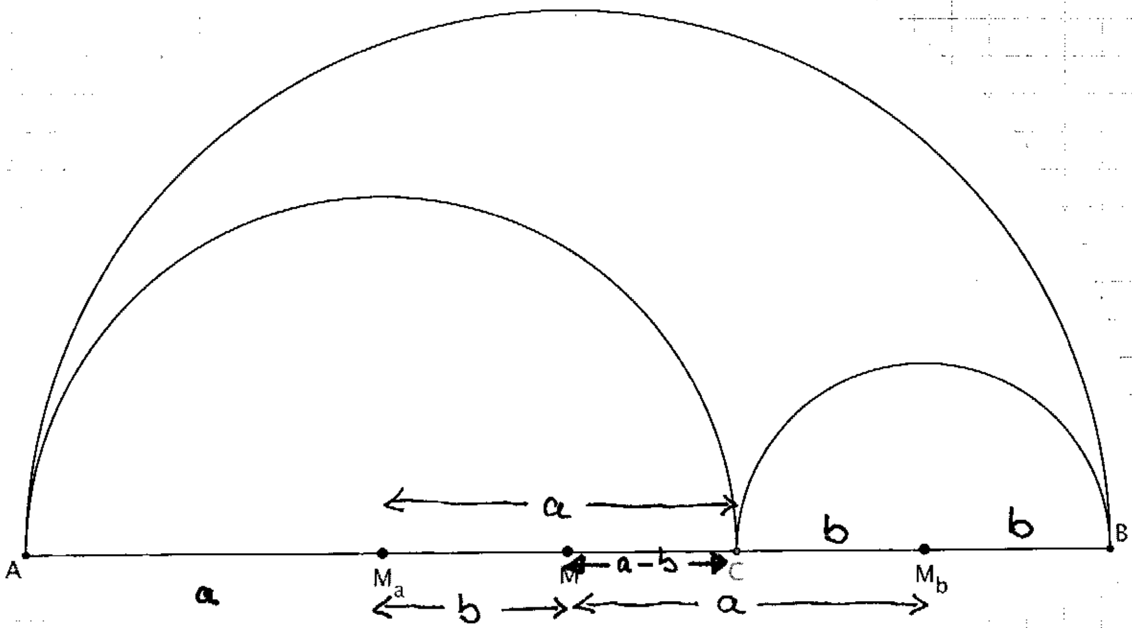
a) Man beginnt mit dem Rechteck DEFC, mit $|DE| = 5$ cm $|EF| = 4$ cm. Dann verlängert man



$\overline{DE}$ über D hinaus und zeichnet auf der Verlängerung A mit $|AD| = 7$ cm. Dann zeichnet man B als Schnitt von AC mit EF. Durch entsprechende Parallelen durch F, B, A und D ergänzt man die Figur, so dass das Rechteck CGHI entsteht, welches das gesuchte Rechteck ist.

HAUSÜBUNGEN

2.



a) $|M_a A|$ ist der Radius des äußeren Kreises,

also $|MA| = a+b$

$|M_a M| = |MA| - |M_a A| = a+b-a = \underline{\underline{b}}$

ebenso gilt $|MB| = a+b$ und

$|M M_b| = |MB| - |M_b B| = a+b-b = \underline{\underline{a}}$

Analog gilt

$|MC| = |MB| - |CB| = a+b-2b = \underline{\underline{a-b}}$

(Liegt C links von M, da $a<b$, so gilt

$|MC| = b-a$)

2

b) Wir nennen $|AB| = d$

Bedingung: $|MC| = |CM_b|$ also $a-b = b$

$\Rightarrow \quad a = 2b$ 1

mit $d = 2a+2b$ ergibt sich $d = 3a \quad a = \frac{1}{3}d$

und $b = \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}d$.

Also $|AM_a| = a = \frac{1}{3}d$, $|M_a M| = b = \frac{1}{6}d$

$|MC| = a-b = \frac{1}{6}d \quad |MM_b| = a = \frac{1}{3}d$ 1

(Die Strecke $\overline{M_a B}$ wird durch M, C, M_b in vier gleiche Teile eingeteilt.)

3. Für die Kreisfläche gilt

$$A_0 = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2 \qquad (r \text{ Radius, } d \text{ Durchmesser})$$

also für den Halbkreis

$$A = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{8}\pi d^2 \qquad (1)$$

Summe der Halbkreise über den Katheten

$$\frac{1}{8}\pi a^2 + \frac{1}{8}\pi b^2 = \frac{1}{8}\pi (a^2 + b^2)$$

Halbkreis über der Hypotenuse

$\frac{1}{8}\pi c^2$. Wegen $a^2 + b^2 = c^2$

gilt auch $\frac{1}{8}\pi (a^2 + b^2) = \frac{1}{8}\pi c^2$ (1)

Damit ist der Satz von Pythagoras auch für Halbkreise gezeigt.

4. a. Jeder Kreisbogen ist ein Sechstel Kreis mit dem Radius a.

$$B = \frac{1}{6}\cdot 2\pi a = \frac{1}{3}\pi a \qquad \underline{\underline{U}} = 3B = \underline{\underline{\pi a}} \qquad (1)$$

b. Das Flächenstück  ist ein Sechstel (wegen $60° = 360° : 6$) der Kreisfläche mit dem Radius a.

$A_{\triangle} = \frac{1}{6}\pi a^2$. Legt man drei davon, immer um $120°$ gedreht, übereinander, so ist die Fläche des Bogendreiecks abgedeckt. Dabei wird die Fläche des Dreiecks dreifach gezählt. Also

$$A = 3 \cdot A_{\triangle} - 2 A_{\Delta} = 3 \cdot \frac{1}{6}\pi a^2 - 2 \cdot \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{A = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\, a^2}} \qquad (2)$$

c. $a = 5\,cm$ $\quad U = \pi \cdot 5\,cm \approx 15{,}7\,cm$

Beurteilung: Der Umfang des Dreiecks wäre $3 \cdot 5\,cm = 15\,cm$. Die Bögen sind ein wenig länger als die Strecken. Also scheint $\pi \cdot a$ richtig zu sein. 1

$$A = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\,a^2 = \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3}) \cdot 5^2\,cm^2$$
$$\approx 0{,}701 \cdot 25\,cm^2 \approx 17{,}6\,cm^2$$

Beurteilung: Das Bogendreieck ist deutlich kleiner als das Quadrat über der Kante a ($a^2 = 25\,cm^2$), aber mehr als die Hälfte ($12{,}5\,cm^2$). Somit scheint $17{,}6\,cm^2 \approx \frac{1}{2}(\pi - \sqrt{3})\,a^2$ richtig zu sein. 1

5a. 1 - 3 $\quad$ 2 - 4 $\quad$ 6 - 9 $\quad$ 7 - 8 $\quad$ 5 - 10 $\quad$ 1

b. A - D $\quad$ B - E $\quad$ C - H $\quad$ F - G $\quad$ 1

A2	A3	A4	A5	Σ
4	2	5	2	13