

3. Übung Lösungen

PRÄSENZÜBUNG

1a Zwischen den beiden Sechsecken liegen 6 kongruente Dreiecke (z.B. $\triangle A'B'B'$).

Das Sechseck ABCDEF ist mit insgesamt 24 dieser Dreiecke ausgelegt.

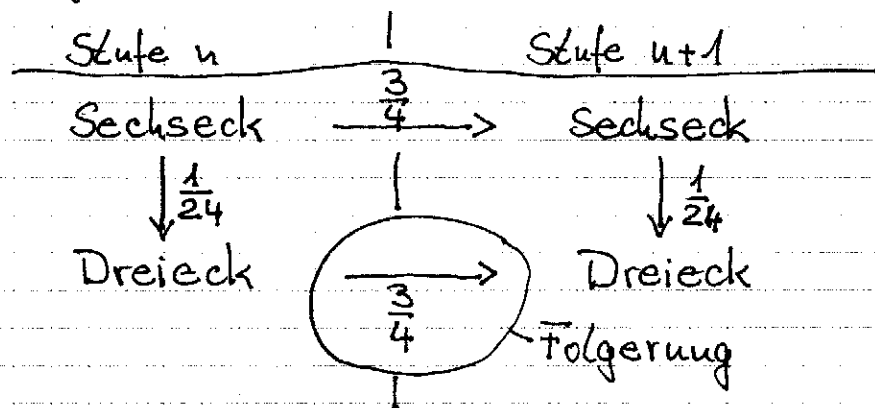
Also hat jedes Dreieck den Flächeninhalt $\frac{1}{24}$.

b. 6 Dreiecke liegen außerhalb von $A'B'C'D'E'F'$.

Also 18 innerhalb. Das ist eine Fläche von $\frac{18}{24} = \frac{3}{4}$.

c. $\frac{3}{4}$ Dh. von Mittensechseck zu Mittensechseck wird der Flächeninhalt mit $\frac{3}{4}$ multipliziert.

d. Die Dreiecke sind auf jeder Stufe $\frac{1}{24}$ des zugehörigen Sechsecks.



e. D_1 sei die Fläche des 1. Dreiecks

D_n " " n . Dreiecks

Nach d. gilt $D_{n+1} = D_n \cdot \frac{3}{4}$ (rekursiv)

also explizit (geometr. Folge) $D_n = D_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

Angaben laut Aufgabe $0,1 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = \frac{1}{40} \approx 0,025$$

12

$$(n-1) \log \frac{3}{4} = \log 0,025 \quad n-1 = \frac{\log 0,025}{\log 0,75} \approx 12,8$$

Also $n \geq 14$

Probe: $4 \text{ cm}^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} \approx 0,095$

Ab Dreieck Nummer 14 sind die Flächeninhalte kleiner als $0,1 \text{ cm}^2$.

f. $A_{\text{sp}} = \sum_{k=1}^{\infty} D_k = D_1 \cdot \frac{1}{1-q} \quad \text{mit } q = \frac{3}{4}$

$$D_1 = \frac{1}{24}$$

$$A_{\text{sp}} = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{24} \cdot 4 = \frac{1}{6}$$

Die Fläche eines Spiralarms ist $\frac{1}{6}$ der Gesamtfläche, was anschaulich schon klar war.

g. Wenn der Flächeninhalt mit $\frac{3}{4}$ abnimmt, so ~~ist~~ gilt für den (Längen-)Skalierungsfaktor s :

$$s^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow s = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{3} \approx 0,866$$

HAUSÜBUNGEN

2. a. Jedes Parallelogramm ist ^{exakt} selbstähnlich mit $s = \frac{1}{2}$ und $n = 4$

b. Ein Kreis ist nicht exakt selbstähnlich

c. Jeder Würfel ist exakt selbstähnlich mit $s = \frac{1}{2}$ und $n = 8$.

d. Das Achteck ist nicht ^{exakt} selbstähnlich.

e. Jedes Dreieck ist selbstähnlich mit $s = \frac{1}{2}$ und $n = 4$

f. Eine (quadratische) Pyramide ist nicht exakt selbstähnlich

g. nicht exakt selbstähnlich

je falsch $-\frac{1}{2}$

(3)

3

3 a. Entlang einer Diagonale kann man gut erkennen: $s = \frac{1}{3}$ $n = 7$

$$d = \frac{\log 7}{\log 3} \approx 1,77$$

Es gilt auch $s' = \frac{1}{9}$ und $n' = 49$

$$d = \frac{\log 49}{\log 9} \approx 1,77$$

(1,5)

b. Auch hier gilt $s = \frac{1}{3}$

$$n = 5 \Rightarrow d = \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1,465$$

Dann gilt auch $s' = \frac{1}{9}$ und $n' = 25$

$$d = \frac{\log 25}{\log 9} \approx 1,465$$

(1,5)

c. Beim Mengerschwamm gilt $s = \frac{1}{3}$ und $n = 20$

$$d = \frac{\log 20}{\log 3} \approx 2,73$$

Dann gilt auch $s' = \frac{1}{9}$ und $n' = 400$

$$d = \frac{\log 400}{\log 9} \approx 2,73$$

(1,5)

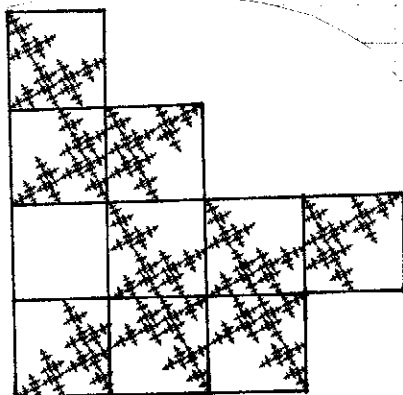
d. (Verwandter zum Sierpinski dreieck)

$$s = \frac{1}{2} \quad n = 3 \quad d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585$$

$$s' = \frac{1}{4} \quad n' = 9$$

$$d = \frac{\log 9}{\log 4}$$

$$\approx 1,585$$



(1,5)

4 a) geht mit $A-F$, $B-D$, $C-E$

b) geht nicht, da A auf F kommt

c) geht nicht, da A auf E kommt

d) geht mit $A-E$, $B-D$, $C-F$

e) geht mit $A-D$, $B-E$, $C-F$

je falsch $-\frac{1}{2}$

(2)

A2	A3	A4	Σ
3	6	2	11

4