

1. Übung, LösungenPRÄSENZÜBUNG

1. $a = 2 \text{ cm}$ $V = a^3 = 8 \text{ cm}^3$

a) $O = 6a^2 = 24 \text{ cm}^2$

b) Außenhaut $\approx O \cdot d = 24 \text{ cm}^2 \cdot 0,1 \text{ cm} = 2,4 \text{ cm}^3$

2,4 von 8 sind $\frac{2,4}{8} = 0,3 = 30\%$

(exakte Rechnung wäre: Außenwürfel (Kante 2 cm)

- Innenwürfel (Kante 1,8 cm)

also $V_a = 8 \text{ cm}^3$ $V_i = (1,8 \text{ cm})^3 = 5,832 \text{ cm}^3$

$V_a - V_i = 8 \text{ cm}^3 - 5,832 \text{ cm}^3 = 2,168 \text{ cm}^3$)

c) $a = 4 \text{ cm}$ $V = a^3 = 64 \text{ cm}^3$

$O = 6a^2 = 96 \text{ cm}^2$

Außenhaut $\approx O \cdot d = 96 \text{ cm}^2 \cdot 0,1 \text{ cm} = 9,6 \text{ cm}^3$

9,6 von 64 sind $\frac{9,6}{64} = \frac{0,6}{4} = 0,15 = 15\%$

Vergleich zum ersten Würfel mit $a = 2 \text{ cm}$: Die Außenhaut macht beim größeren Würfel nur noch 15% aus gegenüber den 30% beim kleineren Würfel.

d) kleine Kinder haben (wie Würfel) ein ungünstigeres Verhältnis von Oberfläche („Außenhaut“) zu Volumen („Körperinneres“) und kühlen somit viel schneller aus.

2. Bei der Pizza ist bei gleicher Dicke die Fläche maßgeblich für ihre Größe (= Menge)

12

$$A_0 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \pi d^2$$

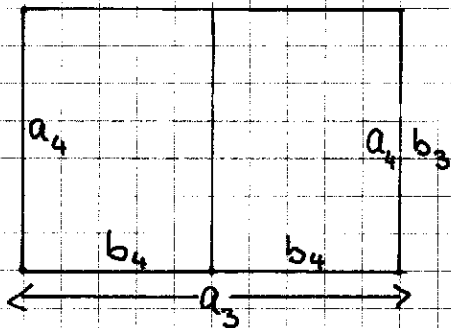
$$A_{0_1} = \frac{1}{4} \pi (30 \text{ cm})^2 = \frac{1}{4} \pi 900 \text{ cm}^2$$

$$A_{0_2} = \frac{1}{4} \pi (40 \text{ cm})^2 = \frac{1}{4} \pi 1600 \text{ cm}^2 \quad \cdot \frac{16}{9} \approx 1,78$$

Kosten: 30 Zeds $\rightarrow$ 40 Zeds
 $\cdot \frac{4}{3} \approx 1,33$

Die Größe steigt stärker als die Kosten. Also bekommt man bei der 40cm-Pizza mehr für sein Geld.

3.



Wir nennen die lange Seite des A4-Blattes a_4 , die Breite b_4
 Analog beim A3-Blatt a_3 und b_3

a) exakt ähnlich heißt $\frac{a_4}{b_4} = \frac{a_3}{b_3} \Leftrightarrow \frac{a_3}{a_4} = \frac{b_3}{b_4}$

1. Verhältnis: Man bildet das Verhältnis von zwei Seiten einer Figur und vergleicht es mit dem entsprechenden Verhältnis in der anderen Figur.

2. Verhältnis: Man sucht zu einer Seite in einer Figur die entsprechende Seite in der anderen Figur und vergleicht dieses Verhältnis mit dem eines anderen Paares entsprechender Seiten.

3b) Vergleicht man die Seiten des A3-Blatts mit denen des A4-Blatts, so erkennt man:

$$b_3 = a_4 \text{ und } a_3 = 2b_4$$

$$\text{Einsetzen in } \frac{a_4}{b_4} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{2b_4}{a_4}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ a_4^2 & = & 2b_4^2 \end{array} \Rightarrow \frac{a_4^2}{b_4^2} = 2 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow \frac{a_4}{b_4} = \sqrt{2} \quad \text{Das gilt auch für das A3-Blatt, da ja } \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4} = \sqrt{2}$$

Da alle Blätter im DIN A-Format exakt ähnlich sind, gilt für alle $\frac{\text{lange Seite}}{\text{kurze Seite}} = \sqrt{2} \approx 1,414$

$$c) \quad a_3 \xrightarrow{:\sqrt{2}} b_3 = a_4 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0,707 \approx 71\%$$

Der Verkleinerungsfaktor ist 71% (und eben nicht 50%)

HAUSÜBUNGEN

$$4. \quad 1 \text{ Gallone} \approx 3,785 \text{ l} \quad 1 \text{ mile} \approx 1,609 \text{ km}$$

$$\text{Dann sind } 23 \text{ mpg} \quad \underbrace{23 \cdot 1,609 \text{ km}}_{= 37,007} \text{ pro } 3,785 \text{ l}$$

Also braucht es

$$\begin{array}{l} 3,785 \text{ l auf } 37,007 \text{ km} \\ 0,1023 \text{ l auf } 1 \text{ km} \\ \hline 10,23 \text{ l auf } 100 \text{ km} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} : 37,007 \\ \cdot 100 \end{array}$$

(2)

allgemeine Rechnung

$$x \text{ mpg sind } x \cdot 1,609 \text{ km pro } 3,785 \text{ l}$$

$$1 \text{ km pro } \frac{3,785}{x \cdot 1,609} \text{ l}$$

$$100 \text{ km benötigen } \frac{3,785 \cdot 100}{1,609 x} \text{ l}$$

$$\text{Das sind } \frac{235,24}{x} \frac{\text{l}}{100 \text{ km}}$$

Also Rechenrezept: Teile 235 durch die eine Zahl angabe und du erhältst die andere.

Beispiel: Ein Verbrauch von $5,9 \frac{l}{100 km}$ sind ($235 : 5,9 \approx 40$) also (für Amerikaner fast unglaubliche) 40 mpg.

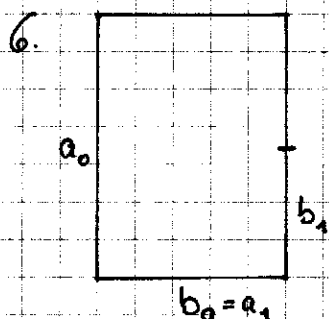
5. a) $1 \text{ foot} = 12'' = 12 \cdot 2,54 \text{ cm} \approx 30,5 \text{ cm}$ ①

b) $1 \text{ sqft} = (30,5 \text{ cm})^2 \approx 930 \text{ cm}^2$

$1 \text{ sqft} = (12'')^2 = 144 \text{ sq inch}$ ①

c) $1 \text{ yd} = 3 \text{ ft} = 36''$

$1 \text{ cube yard} = (36'')^3 = 46656 \text{ cube inch}$ ①



$a_0 \cdot b_0 = 1 \text{ m}^2 = 10.000 \text{ cm}^2$ (1)

$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{b_0}{\frac{1}{2}a_0} \Rightarrow \frac{1}{2}a_0^2 = b_0^2$

Ähnlichkeit von A_0 und A_1

$\Rightarrow b_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} a_0$

einsetzen in (1)

$a_0 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} a_0 = 10.000 \text{ cm}^2 \quad | \sqrt{\quad}$

$a_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = 100 \text{ cm}$

①

$a_0 = \sqrt[4]{2} \cdot 100 \text{ cm} \approx 118,92 \text{ cm}$

$b_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot 100 \text{ cm}$

$= \sqrt[4]{\frac{1}{2^2}} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot 100 \text{ cm}$

$= \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \cdot 100 \text{ cm} \approx 84,09 \text{ cm}$

①

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
Länge a...	118,92 cm	84,09 cm	59,46 cm	42,05 cm	29,73 cm
Breite b...	84,09 cm	59,46 cm	42,05 cm	29,73 cm	21,03 cm

①

b) Prüfung der rechnerischen Ergebnisse

$$\frac{b_1}{b_0} \approx 0,7071 \quad \frac{b_2}{b_1} \approx 0,7072 \quad \frac{b_3}{b_2} \approx 0,7070$$

nur Zahlen ①

Nach der Definition gilt

Die Breite b_n ist die Länge a_{n+1} des nächst kleineren Blatts

$$b_n = a_{n+1}$$

Die halbe Länge $\frac{1}{2} a_n$ ist die Breite b_{n+1} des nächst kleineren Blatts

$$\frac{1}{2} a_n = b_{n+1}$$

Alle Blätter sind ähnlich $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} a_n}{b_n}$

$$\Rightarrow b_n^2 = \frac{1}{2} a_n^2 \Rightarrow b_n = \sqrt{\frac{1}{2}} a_n \quad \text{oder auch} \quad a_n = \sqrt{2} b_n$$

Dann gilt

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n = \frac{1}{2} \sqrt{2} b_n = \sqrt{\frac{1}{2}} b_n$$

oder

Herleitung ②

$$\text{Also } b_0 \xrightarrow{\cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} b_1 \xrightarrow{\cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} b_2 \xrightarrow{\cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} b_3 \quad \text{u. s. w.}$$

Die Folge der Breiten $b_0, b_1, b_2, \dots$ ist geometrisch mit $q = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0,7071$ 7. a) Ein Dreieck entsteht an einer Würfelfecke,
also 8 Dreieckeb) Jedes Quadrat ist der Rest der alten Würfelfläche,
also 6 Quadratec) Alle Flächenkanten sind $8 \cdot 3 + 6 \cdot 4 = 48$. Also
gibt es $48 : 2 = 24$ Körperkantend) Es gibt 48 Flächenecken. Je 4 stoßen in einer
Körperecke zusammen, also $48 : 4 = 12$ EckenOder: Jede Ecke ist der Mittelpunkt der alten
Würfelkanten. 12 Würfelkanten, also 12 Ecken ②