



4 Kombinatorik

Kombinatorik ist die Lehre vom Zählen bzw. Abzählen. Abgezählt werden Kombinationsmöglichkeiten, Auswahlen oder einfach nur die Elemente von Mengen. Das klingt einfach und ist es auch, solange es um kleine, übersichtliche Zahlen geht. Wenn die Zahlen größer werden und sich so konkreten Experimenten entziehen, kann es schwieriger werden. Das Unangenehme ist, und das soll hier auch nicht verschwiegen werden, dass einfache Fragestellungen durch nur leichte Modifikationen sehr schwer werden können.

Wir werden hier einige Grundregeln kennen lernen, die das Gebiet der Kombinatorik strukturieren sollen.

4.1 Vollständige Listen

Eine sehr wichtige, insbesondere für den Erkenntnisprozess grundlegende Lösungsmöglichkeit ist das Aufstellen einer vollständigen Liste. Das ist sehr arbeitsaufwändig, aber immer dann zu empfehlen, wenn andere Strategien fehlen oder offensichtlich nicht greifen. So ist das Aufstellen einer kompletten Liste die erste Herangehensweise, wenn das Thema in der Grundschule eingeführt wird.

Bsp.

Beispiel

„Du hast vier Legoklötzchen, einen weißen, einen roten, einen blauen und einen grünen. Du sollst drei von ihnen übereinander stecken. Wie viele verschiedene Türmchen kannst du so bauen?“

Zwei Türmchen sind auch dann verschieden, wenn sie die gleichen Farben enthalten, die aber in einer anderen Anordnung vorkommen.“

So oder ähnlich lauten die Aufgaben, die zu diesem Thema in Grundschulbüchern vorkommen.

Das wesentliche Problem beim Aufstellen einer Liste ist, keine Möglichkeit auszulassen und nicht versehentlich eine Möglichkeit mehrmals aufzuführen. Das kann man vermeiden, wenn man die Liste systematisch aufstellt. Die Systematik, die man dabei anwendet, ist oftmals ein Ansatzpunkt für eine generelle Lösung.

Beim Aufstellen der Listen kann man u.a. nach zwei Grundprinzipien vorgehen: lexikalische oder numerische Ordnung.

Bei der lexikalischen Ordnung denkt man sich jedes Symbol als einen Buchstaben. Die „Wörter“ werden dann wie im Lexikon alphabetisch geordnet. Dabei kommt „AAB“ vor „AB“.

Bei der numerischen Ordnung denkt man sich jedes Symbol als eine Ziffer. Die so entstehenden „Zahlen“ werden der Größe nach geordnet. Dabei kommt „112“ nach „12“.



Beide Ordnungen sind nur dann verschieden, wenn in der Liste unterschiedlich lange Symbolketten vorkommen.

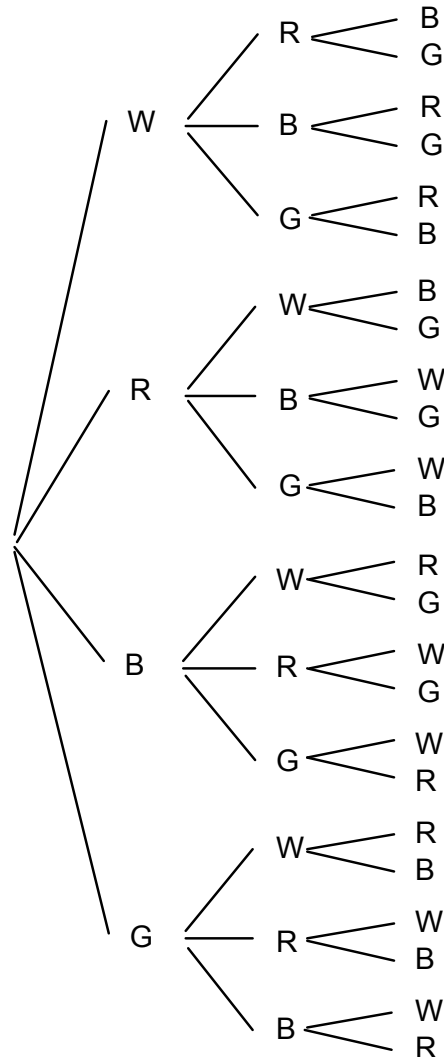
4.2 Baumdiagramme

Baumdiagramme sind im Prinzip vollständige Listen, die nur in mehr grafischer Form notiert werden. Sie sind ähnlich arbeitsaufwändig. Allerdings kommt man für ein Baumdiagramm nicht ohne Strukturierung aus. Insofern ist ein Baumdiagramm eher mit einer Liste zu vergleichen, die nach einem Ordnungsprinzip aufgestellt ist. Der Vorteil eines Baumdiagramms ist, dass rechnerische Überlegungen leichter ableitbar sind.

Bsp.

So sieht das Baumdiagramm zu unserem Eingangsbeispiel folgendermaßen aus:

Man kann an den Enden aller Verzweigungen abzählen, dass es 24 Möglichkeiten gibt und sieht über die regelmäßigen Verzweigungen auch, wie diese Zahl zustande kommt: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.



4.3 Multiplikationsregel

Bsp.

In einer Kantine kann es täglich kleine Menüs, die aus einer Vorspeise und einem Hauptgericht bestehen. Bei der Vorspeise kann man unter drei Gerichten wählen, beim Hauptgericht unter zweien. Dann ist klar, dass es insgesamt 6 Menüs (gleich Kombination einer Vorspeise mit einem Hauptgericht) gibt.



Allgemein:

Hat man für eine erste Wahl n_1 Möglichkeiten und eine zweite Wahl n_2 Möglichkeiten, so gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2$ Kombinationsmöglichkeiten.

Verallgemeinerung:

Hat man für eine erste Wahl n_1 Möglichkeiten, für eine zweite Wahl n_2 Möglichkeiten, u.s.w. bis letztlich für eine k -te Wahl n_k Möglichkeiten, so gibt es insgesamt $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ Kombinationsmöglichkeiten.

Die Multiplikationsregel ist unmittelbar mit einem weiteren Darstellungsmittel verbunden, der Tupelschreibweise. Hat man insgesamt k mal eine Auswahl zu treffen, so kann man das Ergebnis der Auswahlen als ein k -Tupel schreiben.

Die Anzahl der k -Tupel, die gebildet werden können, ist dann die Anzahl der Kombinationsmöglichkeiten, nämlich $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

$$\begin{array}{ccccccc} (& \dots & , & \dots & , & \dots & , & \dots &) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & n_1 & & n_2 & & n_3 & & n_4 & & n_k \end{array}$$

Bsp.

Beispiel

Autokennzeichen

In Bremen (Stadt) ist ein typisches Autokennzeichen

HB - AB 123

Nach der Stadtkennzeichnung kommen zwei Buchstaben und dahinter eine dreistellige Zahl. Wie viele Kennzeichen kann man nach diesem Muster bilden?

Die fraglichen Kennzeichen sind alle 5-Tupel mit den dargestellten Eintragsmöglichkeiten¹. Folglich kann man $26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 = 608.400$ verschiedene Kennzeichen bilden. Zum Vergleich: Die Stadt Bremen hat ca. 550.000 Einwohner.

$$\begin{array}{ccccccc} (& \dots & , & \dots & , & \dots & , & \dots &) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & 26 & & 26 & & 9 & & 10 & & 10 \end{array}$$

Wir sind nun mit diesen wenigen Mitteln bereits in der Lage, eine weit reichende Regel herzuleiten.

Gegeben sind n verschiedene Dinge (Buchstaben, Ziffern, Zeichen). Diese n Dinge sollen auf alle möglichen Arten angeordnet werden. Von einer Anordnung zu einer anderen findet also eine Vertauschung statt, lat. eine Permutation.

Wie viele Permutationen von n verschiedenen Dingen gibt es? Jede einzelne Anordnung ist ein n -Tupel. Für die Belegung des ersten Platzes hat man noch alle n Dinge zur Aus-

$$\begin{array}{ccccccc} (& \dots & , & \dots & , & \dots & , & \dots &) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & n & & n-1 & & n-2 & & n-3 & & 1 \end{array}$$

¹ Tatsächlich sind nicht alle $26 \cdot 26$ Buchstabenkombinationen zulässig.



wahl. Auf dem zweiten Platz ist bereits ein Ding verteilt, so dass nur noch $n-1$ Dinge zur Auswahl stehen. So verringert sich die Anzahl der Belegungsmöglichkeiten, bis am Ende für den letzten Platz nur noch 1 Ding zur Verfügung steht.

Folglich gibt es insgesamt $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Tupel.

Satz.

Permutationsregel

Zu n verschiedenen Dingen gibt es $n!$ Permutationen.

Wir können noch einen Schritt weiter gehen. Was ist, wenn nicht alle n Dinge verschieden sind?

Bsp.

Beispiel

Wir haben die Ziffernkärtchen $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ und sollen daraus alle möglichen fünfstelligen Zahlen legen. Wir können die Permutationsregeln nicht anwenden, denn die drei $\boxed{3}$ sind nicht unterscheidbar. Unterscheiden wir die drei künstlich, indem wir sie unterschiedlich schreiben, z.B. $\boxed{3}$, $\boxed{3}$ und $\boxed{3}$, so haben wir insgesamt fünf verschiedene Dinge, von denen es $5! = 120$ Permutationen gibt. Dabei bedeuten aber jeweils $3! = 6$ die gleiche Zahl, wenn wir von der künstlichen Unterscheidung der Dreien absehen. Das gibt uns insgesamt $\frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$ Permutationen von 5 Dingen, von denen 3 nicht

unterscheidbar sind. Dieses Beispiel wollen wir zu einer allgemeinen Regel erweitern. Da sie unmittelbar einsichtig ist, verzichten wir auf einen Beweis.

Gegeben sind n Dinge, die in k Gruppen von gleichen Dingen vorliegen. Dabei sei die Anzahl der gleichen Dinge in den Gruppen $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$. Folglich muss gelten: $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$. Die verschiedenen Dinge werden also als Gruppen der Größe 1 mitgezählt.

Allgemeine Permutationsregel

Zu n Dingen, von denen

jeweils $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ gleich sind, $n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_k = n$,

gibt es $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}$ Permutationen.

In unserem obigen Beispiel ist $n = 5$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 3$. Also gibt es

$$\frac{5!}{1! \cdot 1! \cdot 3!} = 20 \text{ Permutationen.}$$



Diese Regel ist die wichtigste für den Teil der Kombinatorik, den wir betrachten werden. Viele andere, grundlegende Gesetzmäßigkeiten lassen sich damit herleiten.

Satz.

Eine Menge mit n Elementen hat $\binom{n}{k}$ k -elementige Teilmengen.

Beweis

Wir schreiben die n Elemente nebeneinander. Eine k -elementige Teilmenge wird dadurch ermittelt, dass wir k mal eine Marke, z.B. ein „+“ schreiben und so die Elemente markieren, die für die Teilmenge ausgewählt werden.

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n\}$$

$$\begin{array}{cccccccc} + & + & & + & & & & + \end{array} \leftarrow \begin{array}{l} k \text{ „+“-Zeichen} \\ n - k \text{ Leerstellen} \end{array}$$

Dann stellt jede mögliche Permutation der k „+“-Zeichen und $n - k$ Leerstellen jede mögliche k -elementige Teilmenge dar. Nach der allgemeinen Permutationsregel gibt es $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Permutationen, also k -elementige Teilmengen. ■

Satz.

Binomischer Lehrsatz

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beweis (durch kombinatorische Überlegungen)

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)}_{n \text{ Faktoren}}$$

Der Summand $a^k b^{n-k}$ entsteht dadurch, dass man beim Ausmultiplizieren der n Faktoren k mal die Variable a wählt und $n-k$ mal die Variable b . Wählen wir im ersten Faktor ein a , so schreiben wir in ein n -Tupel an die erste Stelle ein a .

$$\underbrace{(a, a, b, a, a, a, b, b, a, \dots, a, b, b, b, a)}_{n\text{-Tupel mit } k \text{ Einträgen } a \text{ und } n-k \text{ Einträgen } b}$$

Wählen wir aus dem i -ten Faktor ein b , so schreiben wir an die i -te Stelle im n -Tupel ein b . So entsteht zu einer Auswahl von k Mal a und $n-k$ Mal b ein Tupel mit k Einträgen a und $n-k$ Einträgen b .

Alle weiteren Elemente $a^k b^{n-k}$ entstehen durch andere Anzahlen in der Auswahl der Variablen a und b . Das führt im i -Tupel zu einer Permutation der k Einträge a und $n-k$ Einträge b . Die Anzahl aller möglichen Permutationen von k Einträgen a und $n-k$ Einträgen b ist



$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. Also ist der Koeffizient vor $a^k b^{n-k}$ der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$. ■

4.4 Additionsregel

Für manche Probleme ist es günstig, diese in Teilprobleme zu zerlegen. In der Kombinatorik kann dieses günstigerweise dadurch geschehen, dass man für ein Merkmal spezielle Fälle unterscheidet. Wichtig dabei ist, dass diese Merkmale zu disjunkten Teilmengen führen, dass also die unterscheidenden Merkmale nicht gleichzeitig auftreten können.

$\mathcal{B}_{sp.}$

Beispiel

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, in denen wenigstens zwei Ziffern gleich sind?

Das lässt sich zerlegen in „alle drei Ziffern sind gleich“ und „genau zwei Ziffern sind gleich“. Diese beiden Eigenschaften können nicht gleichzeitig eintreten, also ist das eine disjunkte Zerlegung der Eigenschaft „wenigstens zwei Ziffern sind gleich“.

Die Eigenschaft „genau zwei Ziffern sind gleich“ lässt sich zerlegen in „die 1. und 2. Ziffer sind gleich“, „die 1. und 3. Ziffer sind gleich“ und „die 2. und 3. Ziffer sind gleich“.

Hat man für diese Teilprobleme die Anzahlen bestimmt, so sind anschließend die gefundenen Möglichkeiten zu addieren.

Wir wenden das auf unser Beispielproblem an:

Man beachte dabei, dass die erste Ziffer (Hunderterstelle) einer dreistelligen Zahl nicht 0 sein kann, es also nur 9 mögliche Ziffern gibt. Auf den anderen beiden Stellen sind alle 10 Ziffern zulässig. Soll eine Stelle von einer anderen verschieden sein, so ist auf der hinteren Stelle eine Möglichkeit weniger, denn die Wahl der vorderen Stelle darf ja nicht wiederholt werden.

„alle drei Ziffern sind gleich“	$(\dots, \dots, \dots) 9 \cdot 1 \cdot 1 = 9$
„die 1. und 2. Ziffer sind gleich“	$(\dots, \dots, \dots) 9 \cdot 1 \cdot 9 = 81$
„die 1. und 3. Ziffer sind gleich“	$(\dots, \dots, \dots) 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$
„die 2. und 3. Ziffer sind gleich“	$(\dots, \dots, \dots) 9 \cdot 9 \cdot 1 = 81$

Diese vier Fälle sind eine disjunkte Zerlegung der Bedingung „wenigstens zwei Ziffern sind gleich“. Folglich sind die berechneten Möglichkeiten zu addieren: $9 + 81 + 81 + 81 = 252$.



Die Additionsregel ist ein Sonderfall einer allgemeineren Regel zur Bestimmung der Anzahl der Elemente von Mengen.

Schreib- und Sprechweise:

Für eine Menge M bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente in der Menge M . Diese Anzahl nennt man die Mächtigkeit der Menge M .

Satz.

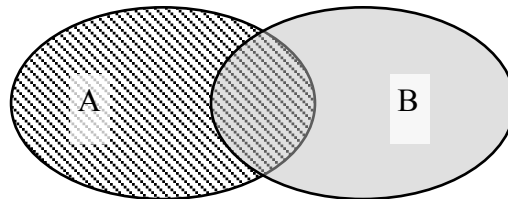
Dann gilt allgemein für zwei endliche Mengen A und B :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Begründung:

Am einfachsten lässt sich dieser Zusammenhang an einer grafischen Darstellung erläutern:

Berechnet man die Elemente, die in A liegen und die in B liegen, so werden die Elemente, die gleichzeitig in A und B liegen, also in $A \cap B$ liegen, zwei Mal gezählt. Man muss also die Mächtigkeit des Durchschnitts einmal wieder abziehen.



Sonderfall:

A und B sind disjunkt, also $A \cap B = \emptyset$, also $|A \cap B| = 0$.

Dann gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Genau das ist die Aussage der Additionsregel.

4.5 Das Urnenmodell

Viele kombinatorische Überlegungen lassen sich in ein Modell übersetzen, in dem Kugeln aus einem Behälter gezogen werden. Für den Behälter hat sich traditionell durchgesetzt, diesen als eine Urne zu bezeichnen. Das hat keine tiefere Bedeutung, es ist einfach nur ein Gefäß. Die vorgefertigten, standardisierten Lösungswege gehen davon aus, dass in der Urne n verschiedene Kugeln liegen und dass man k Mal eine Kugel zieht. Beim Ziehen kann man die gezogene Kugel jeweils wieder zurücklegen oder nicht. Im ersten Fall hat die Urne also bei jedem Ziehen den gleichen Zustand. Legt man dagegen die Kugel nicht zurück, verringert sich die Kugelanzahl jeweils um 1. Für das Ergebnis der Ziehung kann man die Reihenfolge berücksichtigen. Dann müssen die Kugeln in der Reihenfolge bleiben, in der sie gezogen wurden. Zwei Ziehungen können dann die gleichen Kugeln enthalten, sind aber dennoch verschieden, wenn die Kugeln in



verschiedener Reihenfolge gezogen wurden. So ist $(4, 7, 3)$ eine andere Ziehung als $(7, 4, 3)$. Oder man berücksichtigt die Reihenfolge nicht, dann darf man die Kugeln nach dem Ziehen neu anordnen, um ihnen eine selbst gewählte Ordnung zu geben. Sind die Kugeln durch Zahlen markiert, so ist das üblicherweise die Anordnung nach der Größe.

Bsp.

Beispiel

Verteilt man die Karten beim Skatspiel an die Spieler, so lässt sich der Vorgang folgendermaßen in das Urnenmodell übersetzen. Die 32 verschiedenen Karten werden $n = 32$ verschiedenen Kugeln gleichgesetzt. Ein Spieler erhält 10 Karten, was einem $k = 10$ -maligen Ziehen entspricht. Da eine Karte nicht mehrmals vergeben wird, ist das „Ziehen ohne Zurücklegen“. Jeder Spieler ordnet nach dem Verteilen seine Karten nach einem ihm genehmen System. Folglich werden die Ziehungen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge unterschieden.

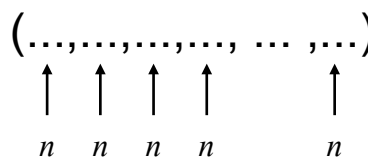
Durch die beiden Unterscheidungen, mit und ohne Zurücklegen und mit und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, gibt es insgesamt vier Fälle, die wir nun nacheinander behandeln wollen.

Mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Mit Zurücklegen

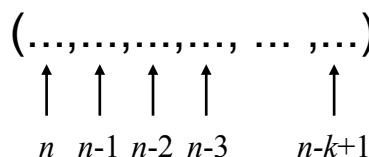
Wegen der Berücksichtigung der Reihenfolge kann jedes Ziehungsergebnis als k -Tupel aufgeschrieben werden. Da die Kugeln zurückgelegt werden, hat man bei jedem einzelnen Zug n Möglichkeiten.

Folglich gibt es insgesamt n^k Ergebnisse dieser Ziehung.



Ohne Zurücklegen

Wieder können wir das Ziehungsergebnis als k -Tupel aufschreiben. Da die Kugeln nicht zurückgelegt werden, hat man von Zug zu Zug eine Möglichkeit weniger.



Folglich gibt es $n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$ Ziehungen. Dieses Produkt fasst man gern der Übersichtlichkeit halber zusammen. Dadurch verliert es allerdings seine ursprüngliche Bedeutung.

$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ Die hier auftauchenden Fakultäten lassen sich nicht direkt als Permutationen interpretieren.



Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Ohne Zurücklegen

Verzichtet man auf eine Unterscheidung durch die Reihenfolge, so gibt es bei k verschiedenen gezogenen Dingen $k!$ Ziehungen, die sich nur durch die Reihenfolge unterscheiden und somit zu einem Fall zusammengefasst werden. Man muss also das oben erzielte Ergebnis

$\frac{n!}{(n-k)!}$ für den Fall „Mit Berücksichtigung der Reihenfolge, ohne

Zurücklegen“ durch $k!$ dividieren. Das ergibt für den Fall „Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, ohne Zurücklegen“

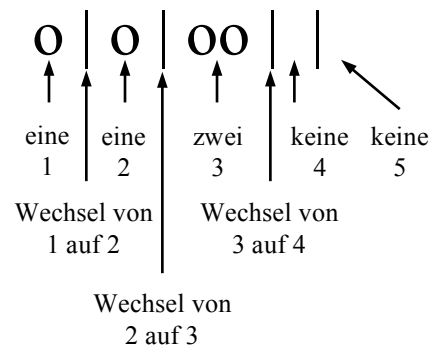
$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Mit Zurücklegen

Man ist verleitet, hier den gleichen Lösungsweg einzuschlagen und die Anzahl der Ziehungen „Mit Berücksichtigung der Reihenfolge, mit Zurücklegen“ einfach nur durch $k!$ zu dividieren. Das ist aus zwei Gründen falsch:

- formal, denn $\frac{n^k}{k!}$ ist im Allgemeinen keine natürliche Zahl,
- inhaltlich, denn die Vertauschung von k Dingen beträgt nur dann $k!$, wenn alle k Dinge verschieden sind. Da hier das Zurücklegen zugelassen ist, können einige der k Dinge aber gleich sein.

Die Lösung ergibt sich wieder einmal durch eine Übersetzung. Da nach der Ziehung die Reihenfolge kein Unterscheidungskriterium ist, ordnen wir die gezogenen Kugeln. Wir nehmen an, dass die Kugeln durch die Zahlen 1 bis n markiert sind. Also ordnen wir die Kugeln nach der Größe der Zahlen. Nun übersetzen wir die gezogenen Zahlen in eine



Kringel-Strich-Folge. Jede Kugel wird einfach in einen Kringel übersetzt, jeden Wechsel der Zahl markieren wir durch einen Strich. Diese Übersetzung ist umkehrbar eindeutig, was wir uns lediglich an einem Beispiel klar machen wollen.

Bsp.

Beispiele

1) Wir haben $n = 5$ verschiedene Kugeln und ziehen $k = 4$ Mal. Das Ergebnis der Ziehung ist z.B. 1, 3, 2, 3. Da die Reihenfolge unerheblich ist, ordnen wir die gezogenen Kugeln der Größe nach. Dann wird (1, 2, 3, 3) übersetzt in $O|O|OO|$ nach der in der Abbildung rechts dargestellten Logik.



2) Umgekehrt kann man aus der Zeichenfolge $||oo|||o$ erkennen: 5 Striche besagen, dass $n = 6$ verschiedene Kugeln in der Urne waren und die $k = 3$ Kringel geben an, dass drei Mal gezogen wurde. Die Abfolge lässt sich dann übersetzen in die Ziehung $(3, 3, 6)$.

Aus dem Beispiel erkennt man, dass man allgemein bei n Kugeln und k Ziehungen $n-1$ Striche hat und k Kringel. Jede mögliche Ziehung ist jede mögliche Permutation der $n-1$ Striche und k Kringel. Das geht nach der allgemeinen Permutationsformel auf $\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!}$ Arten. Den

Term kann man sich auch als Binomialkoeffizient $\binom{n-1+k}{k}$ merken.

Wir fassen die vier Fälle des Urnenmodells in einer übersichtlichen Tabelle zusammen:

Aus einer Urne mit n verschiedenen Kugeln wird k Mal gezogen.

		mit	ohne
		Zurücklegen	
mit	Berücksichtigung d.R.	n^k	$n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
ohne		$\frac{(n-1+k)!}{k!(n-1)!} = \binom{n-1+k}{k}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$

Eine weitere Zusammenfassung gilt dem nun mehrmals aufgetauchten Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$, den man auf drei verschiedene Weisen interpretieren kann:

1. Eine Menge mit n Elementen hat $\binom{n}{k}$ k -elementige Teilmengen.
2. Hat man unter n Dingen k gleiche der einen Sorte und $n-k$ einer anderen Sorte, so gibt es $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Permutationen (z.B. binomischer Lehrsatz)



3. Zieht man aus n Kugeln k ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, so gibt es $\binom{n}{k}$ verschiedene Ziehungen.



4.6 Übungsaufgaben

1. Kombinatorik als notwendiges Hintergrundwissen
 „Wie viele Türme kann man aus Klötzchen mit (diesen und jenen) Farben bauen?“ Dabei sollen immer alle vorhandenen Klötzchen zu einem Turm zusammengesetzt werden.
 Für diese Aufgabe wollen Sie passende Klötzchen- und Farbzahlen vorgeben, so dass es auf keinen Fall mehr als 25 Türme gibt. Schreiben Sie alle möglichen Klötzchenkombinationen auf. (Klötzchen mit gleicher Farbe beachten! Die Aufgabe ist erst für mindestens zwei Klötzchenfarben interessant).
2. Beim Spiel „Scrabble“ haben Sie die Buchstaben A D E E H R R R. Wie viele Kombinationen bei Benutzung aller acht Buchstaben können/müssen Sie theoretisch durchtesten? Wenn Ihnen eine Möglichkeit in einer Sekunde klar ist, wie lange dauert das?
3. Sie haben die fünf Ziffern 1, 2, 2, 3, 4 und sollen aus diesen alle möglichen fünfstelligen Zahlen bilden. Die Zahlen denken Sie sich der Größe nach geordnet in einer Liste. Folglich ist die erste Zahl der Liste 12234 und die letzte Zahl der Liste 43221.
 - a. Wie viele Zahlen stehen in der Liste?
 - b. Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 2?
 - c. Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 3?
 - d. An welcher Stelle der Liste steht 13242?
 - e. Welche Zahl steht an der 50. Stelle?
4. Sie haben als Ziffernvorrat 1,1,1,2,2,3 und sollen daraus dreistellige Zahlen bilden.
 - a. Schreiben Sie alle Möglichkeiten in einer Liste auf. Gehen Sie dabei systematisch vor.
 - b. Lösen Sie a. mit einem Baumdiagramm.
 - c. Erhöhen Sie den Ziffernvorrat auf 1,1,1,2,2,3,3,3. Wie viele dreistellige Zahlen gibt es nun? Versuchen Sie, möglichst viele Lösungswege für diese Aufgabe zu finden.
5. In einer Urne befinden sich 2 weiße, 3 schwarze und 4 blaue Kugeln. Es werden 4 Kugeln mit einem Hineingreifen gezogen. Stellen Sie in einer systematischen Liste alle Möglichkeiten dar. Beschreiben Sie mit Text, wie Sie vorgehen.
6. Sie würfeln mit einem Würfel vier Mal hintereinander und wollen die Augensumme 7 erzielen. Welche Möglichkeiten ergeben sich? Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.



7. Fünf Personen A, B, C, D und E setzen sich an einen runden Tisch. Wie viele Sitzordnungen gibt es? Dabei sollen zwei Sitzordnungen dann als verschieden gelten, wenn wenigstens eine Person wenigstens einen anderen Nachbarn hat. Schreiben Sie alle Sitzordnungen auf und beschreiben Sie, mit welcher Systematik Sie sicherstellen, dass Sie alle Sitzordnungen gefunden haben und keine Sitzordnung doppelt vorkommt.
8. Bernd lauscht außerhalb des Raumes einem Fest. Als alle anstoßen, zählt er die Anzahl der „Kling“ mit und kommt auf 25.
 - a. Warum muss er sich verzählt haben?
 - b. Angenommen er hat zu wenig gezählt. Was ist dann die untere Grenze für die Anzahl der Leute, die an dem Fest teilnehmen?
9. In einer Fabrik werden 5 verschiedene Maschinenteile zur Gütekontrolle auf drei Kontrolleure A,B,C verteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn A 1 Maschinenteil erhalten soll, B und C je 2 Maschinenteile? Schreiben Sie alle Verteilungen der Teile auf die drei Kontrolleure in einer Liste auf.
10. Eine andere Annäherung an die Permutationsregel.
Wir nennen die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Dingen $P(n)$.
Behauptung $P(n) = n!$
Beweisen Sie die Behauptung durch vollständige Induktion.
Beim Induktionsbeweis, also dem Schritt von n auf $n+1$, sollen Sie anschaulich erläuternd argumentieren. Hier sind Sie als zukünftige LehrerIn gefragt!
11. Polynomialformel
 - a. Betrachten Sie $(a + b + c)^6$
 - a. Wie oft kommt der Summand a^2b^4 vor?
 - b. Es kommt der Summand ab^2c^x vor. Bestimmen Sie $x \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Koeffizienten.
 - b. Betrachten Sie $(a + b + c + d)^8$.
 - c. Wie viele Summanden hat die Entwicklung?
 - d. Bestimmen Sie den Koeffizienten für $a^2b^2cd^3$.



12. Bahnkarten in Budapest

Die abgebildeten Bahn- und Metrokarten stammen aus Budapest. Die linke Karte wurde nach dem alten Verfahren entwertet. Hierbei werden bei der Entwertung zwei, drei oder vier Löcher in die Karte gestanzt. Das Stanzmuster eines Automaten ändert sich erst am nächsten Tag. Auf der rechten Karte befindet sich gemäß der neuen Entwertungsmethode ein Stempel, der das Datum und die Uhrzeit enthält.



Zu dieser Änderung ist es gekommen, da der ungarische Mathematiker Ödön Vancso die Verwaltung des örtlichen Nahverkehrs darauf hingewiesen hat, dass man gestanzte Karten doch auch sammeln könne. Verfügt man über alle möglichen Stanzmuster, so legt man nur einen Streifen Papier in den Stanzautomat und sucht in der Sammlung anschließend die passende bereits vorgestanzte Karte.

- a. Wie viele solcher Karten müsste man sammeln, um alle möglichen Stanzmuster zu besitzen?
 - b. Passen alle Karten schätzungsweise in eine Aktentasche?
 - c. Wie lange dauert es, seine Kartensammlung vollständig zu durchsuchen, wenn man mit einer Karte 2 Sekunden beschäftigt ist?
13. (*Mathematik-Olympiade 2004/05, Aufgabe für die 7. Klasse, Landesrunde*)
Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Flächen eines Würfels mit sechs gegebenen Farben färben, wenn jede Farbe nur für eine Fläche verwendet werden darf?
Als verschieden gelten nur die Färbungen, die nicht durch Drehung des Würfels ineinander übergeführt werden können.
14. (*Beispiele für ein Urnenmodell mit z.T. ununterscheidbaren Dingen*)
In einer Urne liegen 4 weiße und 3 schwarze Kugeln (sonst gibt es keine weitere Unterscheidung). Sie ziehen aus der Urne nacheinander 4 Kugeln.
Wie viele Möglichkeiten für das Ziehen gibt es?
- a. mit Zurücklegen
 - i. mit Berücksichtigung der Reihenfolge
 - ii. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
 - b. ohne Zurücklegen
 - iii. mit Berücksichtigung der Reihenfolge
 - iv. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge



15. Versuchen Sie, die Aufgabe 14 jeweils zu verallgemeinern auf w weiße und s schwarze Kugeln.

16.

- Welche Auswirkungen haben die Unterscheidungen „mit - ohne Zurücklegen“ und „mit - ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“ auf die Anzahl der Möglichkeiten?
- Begründen Sie damit, welche Zahl für jedes $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}_0$ am größten, am kleinsten und zwischen diesen Extremen sein muss: $\binom{n}{k}$, $\binom{n+k-1}{k}$, n^k oder $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Welche Zahlen lassen sich schwer vergleichen? Warum ist das so?

17. Wir hatten in der Vorlesung an einem Beispiel gesehen, dass $\frac{n^k}{k!}$

keine natürliche Zahl sein muss. Suchen Sie zu $k = 8$

- die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$
- eine weitere Zahl $n \in \mathbb{N}$,

so dass doch $\frac{n^k}{k!}$ eine natürliche Zahl ist.

18. (eine Fleißaufgabe)

- Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, mit denen man $k = 4$ Zahlen aus $n = 4$ ziehen kann, wobei die gezogene Zahl wieder zurückgelegt wird und bei den Ergebnissen die Reihenfolge nicht beachtet wird.
- Schreiben Sie alle Möglichkeiten in einer Liste auf.
- Schreiben Sie hinter die einzelnen Elemente der Liste aus b) die Anzahl der möglichen Vertauschungen.
z.B. $\{1, 2, 3, 3\}$ 12
(da es 12 Vertauschungen (Permutationen) von 4 verschiedenen Dingen, davon 2 gleich, gibt)
- Zählen Sie die Anzahl der Permutationen in c) zusammen. Welche Zahl haben Sie nun bestimmt? Prüfen Sie kritisch und äußern Sie sich sinnvoll.

19. Beim Lotto gibt es $\binom{49}{6}$ verschiedene Tipps.

- Erläutern Sie diese Berechnung durch das Urnenmodell.
- Berechnen Sie $\binom{49}{6}$ exakt.
- Die nachfolgende Tabelle zeigt die Daten der Ausspielung von Samstag, den 10.01.09.



Lottoquoten vom Samstag, 10.01.09		
Gewinnklasse		Gewinnquoten
I	6 Richtige und SZ	0 13.646.632,60 EUR
II	6 Richtige	6 x 399.122,80 EUR
III	5 Richtige und ZZ	49 x 30.545,10 EUR
IV	5 Richtige	1423 x 2.734,60 EUR
V	4 Richtige und ZZ	4998 x 119,70 EUR
VI	4 Richtige	75772 x 39,50 EUR
VII	3 Richtige und ZZ	125064 x 19,10 EUR
VIII	3 Richtige	1396210 x 9,40 EUR
Alle Angaben ohne Gewähr		

Angenommen, wir hätten einen Monstertipp abgegeben,

nämlich Lottoscheine, auf denen jeder der $\binom{49}{6}$ möglichen

Tipps genau einmal vorkommt. Ein Tipp kostet 0,75 €. Wie viel investieren wir in diesen Monstertipp?

- d. Berechnen Sie für die Gewinnklassen II bis VIII, wie viele Tipps jeweils in welche Gewinnklasse fallen.
Beispielansatz für Klasse 5, 4 Richtige und ZZ (Zusatzzahl):

$$\binom{6}{4} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{42}{1}, \text{ denn aus den 6 Gewinnzahlen werden 4}$$

ausgewählt, aus der einen Zusatzzahl eine und aus den 42 „Nieten“ eine.

- e. Berechnen Sie nun, wie viel Geld wir mit dem Monstertipp am letzten Wochenende gewonnen hätten.
f. Berechnen Sie noch, wie viele unserer Tipps nur zwei Richtige, eine Richtige und gar keine Richtige haben und bilden Sie die Summe mit den Gewinntipps aus c. Alle zusammen sollten die Gesamtzahl der Tipps von $\binom{49}{6}$ ergeben.

20. zur Übersetzung in Strich-Punkt-Folgen beim Ziehen mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

- a. Übersetzen Sie in Strich-Punkt-Folgen

i. $n = 6$, Ziehung 1, 1, 2, 4, 5, 6

ii. $n = 7$, Ziehung 1, 1, 1, 5, 5, 5, 7

- b. Übersetzen Sie in „Klartext“

|ooo||oo| und ||ooooo|||oo|

21. *Mathematik-Olympiade Klasse 9, 3.Runde, 1.Aufgabe*

Für eine Projektarbeit sollen die 9 Schüler eines Kurses in Gruppen aufgeteilt werden. Dabei sind nur Gruppen zu zwei oder zu drei Schülern zugelassen.

Wie viele Möglichkeiten für die Gruppeneinteilung gibt es, wenn nicht nur berücksichtigt wird, wie viele Schüler in einer Gruppe sind, sondern auch welche?

22. Bei einem Kartenspiel gibt es 60 verschiedene Karten. Jeder der 3 Mitspieler bekommt 6 Karten, die restlichen 42 Karten kommen als Stapel in die Mitte. Bei der Frage, wie viele Kartenverteilungen es gibt, erhalten Sie als Lösung:

$$1. \binom{60}{6} \cdot \binom{54}{6} \cdot \binom{48}{6}$$

$$2. \frac{60!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 42!}$$

$$3. \binom{60}{18} \cdot \left[\binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6} \right]$$

- Interpretieren Sie die drei Lösungsansätze in ihrem kombinatorischen Grundverständnis. Wie wurde jeweils gedacht?
- Zeigen Sie durch passende Umformungen, dass alle drei Ergebnisse gleich sind.

23. Auf einem Kreis liegen n Punkte.

Jeder Punkt ist mit jedem verbunden. (Dann gibt es

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Verbindungsstrecken.) Die Punkte liegen so (unregelmäßig), dass sich nie drei oder mehr Verbindungsstrecken in einem Punkt schneiden. Wie viele Schnittpunkte gibt es dann?

