sehen, wenn die Person uns direkt gegenüber steht. Denn dann hat sie eine Drehung um die senkrechte Achse gemacht und dabei links und rechts vertauscht.

3.2 Spiegelungen an zwei Spiegeln

Wir wollen uns in diesem Kapitel den Vorgängen am „Spiegelbuch" zuwenden. Als Experimentiergerät versteht man unter einem Spiegelbuch zwei Spiegel, die an einer gemeinsamen Kante zusammengefügt sind und dort einen Winkel α einschließen. Obwohl nur zwei Spiegelflächen vorhanden sind, kann man je nach Größe des Winkels sehr viele Spiegelbilder sehen. Wir wollen hier analysieren, wie viele Spiegelbilder man sehen kann und wie diese im Einzelnen zu erklären sind. Dabei wollen wir uns den Dingen aus zwei Richtungen nähern:

- einmal von der rein geometrischen Seite. Dabei geht es vor allem um die Verknüpfung von Achsenspiegelungen und deren Gesetzmäßigkeiten, wie sie in Kapitel 2 behandelt wurden.
- und dann von der physikalischen Seite. Dabei wollen wir über den Verlauf des Lichtweges erklären, wie diverse Spiegelbilder entstehen.

3.2.1 Der Sonderfall α = 90°

Lässt man die beiden Spiegel des Spiegelbuches einen Winkel von 90° einschließen, so kann man folgendes Bild sehen.

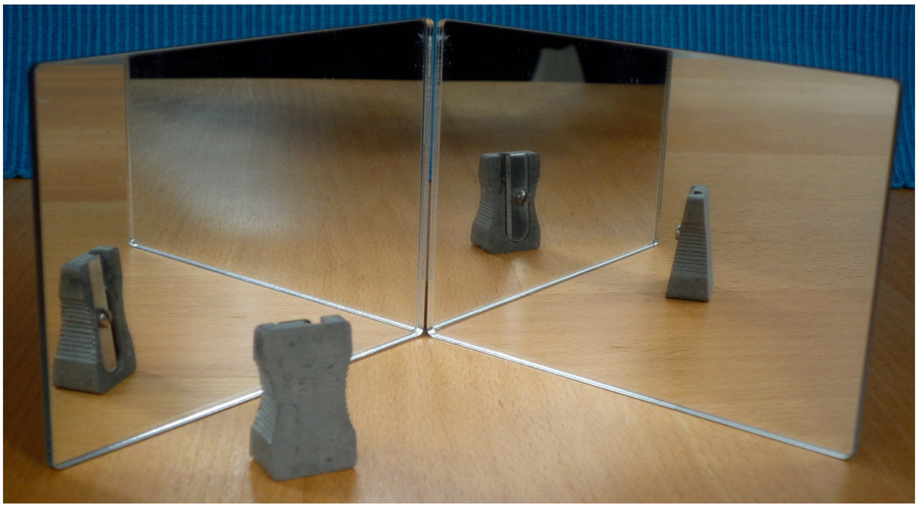

Abb. 3.4: Ein Gegenstand vor dem Spiegelbuch, das einen 90°-Winkel bildet.

Im Vordergrund steht das Original, zusätzlich sehen wir drei Spiegelbilder. Zwei der Spiegelbilder sind direkt erklärbar, da sie die Bilder des Originals in den beiden Spiegeln des Spiegelbuches sind.

Erklärungsbedürftig ist das dritte Spiegelbild, das in der Abb. 3.4 oben in der Mitte zu sehen ist.
Wir sind schnell geneigt, dieses Spiegelbild als Bild des rechten Spiegelbildes in dem gleich danebenstehenden Spiegel zu erläutern. Aber diese Erklärung geht an der Realität vorbei, da es ja nur zwei Spiegel gibt. Die sichtbaren Spiegel hinter den Spiegeln sind ja nicht real.
Schauen wir uns die Situation in einer geometrischen Darstellung an. Dabei schauen wir genau von oben auf das Spiegelbuch, so dass die Spiegelflächen als Spiegelachse erkennbar sind.

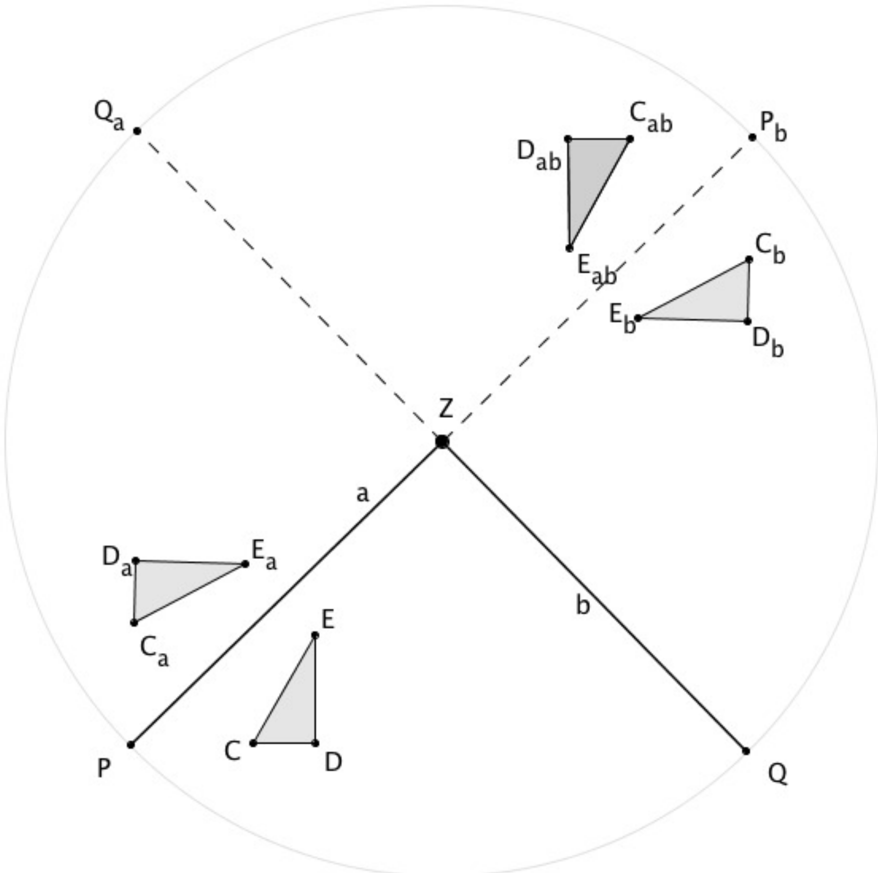

Abb. 3.5: Das Spiegelbuch in der abstrakten, geometrischen Darstellung

Die beiden real vorhandenen Spiegel sind hier durch die Strecken $\overline{PZ}$ und $\overline{QZ}$ dargestellt. Die in der Realität gemeinsame Kante schrumpft hier auf den Schnittpunkt Z. Das Original ist das Dreieck CDE. Einfach erkennbar ist das Spiegelbild bei Spiegelung an a, das Dreieck $C_aD_aE_a$.
Dabei wollen wir hier folgende Notation für gespiegelte Punkte einführen: Ist die Achse a gegeben, so bezeichnen wir weiterhin die Achsenspiegelung an a mit S_a. Wird der Punkt P mit der Spiegelung S_a abgebildet, so verwenden wir die übliche Schreibweise für Funktionen: $S_a(P)=P_a$. Den Bildpunkt bezeichnen wir mit dem entsprechenden

Index, also P_a. Konsequenter Weise ist dann P_b der Bildpunkt bei der Spiegelung an der Achse b. Bei der Verknüpfung von Spiegelungen wollen wir im Index ebenso die Reihenfolge von rechts nach links einhalten. Spiegeln wir zuerst an a und dann an b, so schreiben wir $S_b(S_a(P)) = P_{ba}$. Entsprechend steht dann P_{ab} für den Bildpunkt, den wir erhalten, wenn P zuerst an b und dann an a gespiegelt wird.
Ebenfalls leicht einzusehen (Abb. 3.5) ist das Spiegelbild des Dreiecks CDE bei Spiegelung an b, also das Dreieck $C_bD_bE_b$. Als drittes Spiegelbild bekommen wir das Bild des Dreiecks $C_bD_bE_b$ an dem hinten stehenden Spiegel als Verlängerung von a. In unserer Notation ist das dann das Dreieck $C_{ab}D_{ab}E_{ab}$. Hierzu ergeben sich zwei Fragen:

a. Ist das Dreieck $C_{ab}D_{ab}E_{ab}$ auch das Bild vom Dreieck $C_aD_aE_a$, gespiegelt an b, bzw. dessen Verlängerung?
b. Wie entsteht dieses Bild genau? Denn die (im Foto) sichtbaren Spiegel hinter den Spiegeln gibt es ja nicht.

Die Frage a. wollen wir in einer geometrischen Aussage formulieren und beweisen.

Satz
Gegeben sind die beiden Achsen a und b, die sich im Punkt Z schneiden. S_a und S_b sind die Spiegelungen an den Achsen a und b.
Dann gilt die Äquivalenz:
Für alle Punkte P der Ebene gilt $S_b(S_a(P)) = S_a(S_b(P)) \Leftrightarrow a \perp b$

Beweis
"$\Rightarrow$"
Spiegelt man erst an a und dann an b, so erhält man eine Drehung um den Punkt Z um den Winkel 2α. Spiegelt man dagegen erst an der Achse b und dann an a, so ist die Drehung wieder um Z, nun aber um den Winkel $2(180° - \alpha)$, denn der eingeschlossene Winkel zählt von der ersten Achse b gegen den Uhrzeigersinn zur zweiten Achse a. Beide Drehungen sind gleich, wenn beide Drehwinkel gleich sind.

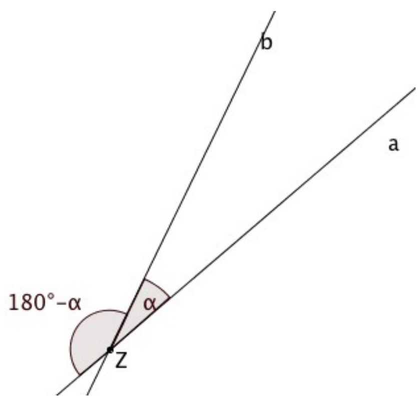

Abb. 3.6: Die Winkel zwischen den Achsen

$$2\alpha = 2(180° - \alpha) \Rightarrow \alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \alpha = 90°$$

Das besagt aber, dass a und b senkrecht zueinander sind.
"$\Leftarrow$"
Sind die beiden Achsen a und b senkrecht zueinander, so ist der Winkel gegen den Uhrzeigersinn zwischen a und b genau so groß wie der zwischen b und a, nämlich 90°. Daher ergeben die Verknüpfung

der beiden Spiegelungen $S_b \circ S_a = D_{z,180°}$ und $S_a \circ S_b = D_{z,180°}$ die gleiche Abbildung, nämlich eine Drehung um Z um 180°.

Die Frage b., wie denn das dritte Spiegelbild entsteht, ist eher physikalischer Natur. Das Licht von der Lichtquelle L wird zunächst an einem Spiegel reflektiert und dann am anderen. Die so zwei Mal reflektierten Strahlen fallen dann in unser Auge.
Verlängern wir diese Strahlen in rückwärtiger Richtung hinter den Spiegel, so scheinen sie von einer Quelle auszugehen, deren Position wir erhalten, wenn wir die Originalquelle geometrisch erst am rechten (Bild L') und dann am linken Spiegel (Bild L'') reflektieren.

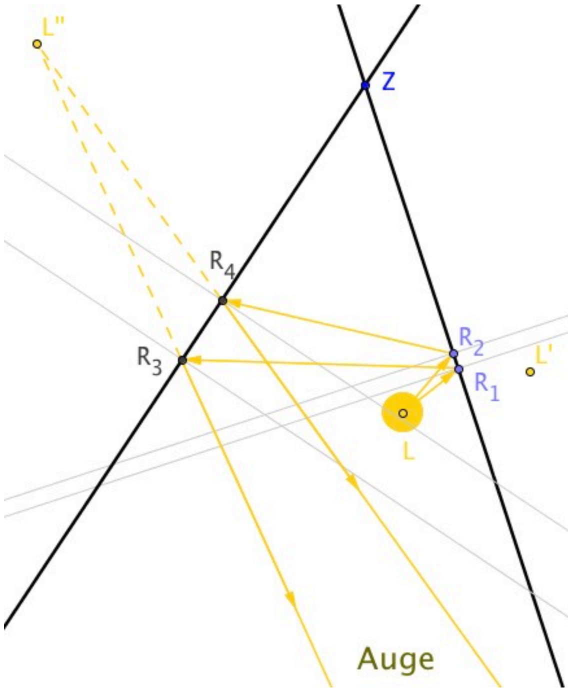

Abb. 3.7: Der Strahlenverlauf bei zweimaliger Reflexion

Bilden die beiden Spiegel einen rechten Winkel, so ist es egal, ob das Licht zuerst am einen oder am anderen Spiegel reflektiert werden. Das virtuelle Bild nach zweimaliger Reflexion ist in beiden Fällen gleich. Das ist die Aussage des obigen Satzes.

3.2.2 Der Sonderfall α = 60°

Der nächste, interessante Fall ist der Winkel von 60° zwischen beiden Winkeln.

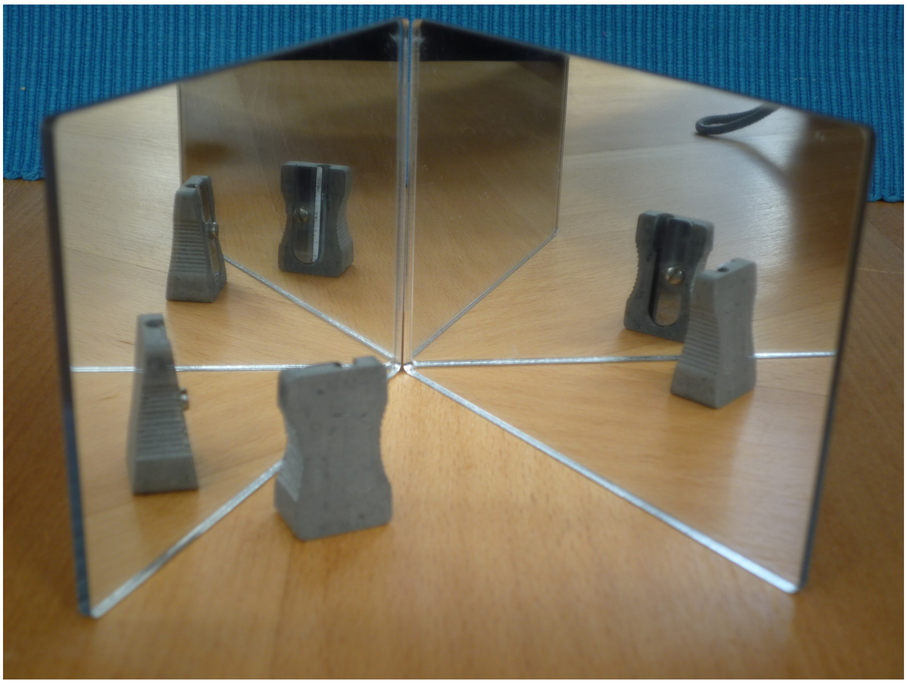

Abb. 3.8: Das Spiegelbuch mit einem Winkel von 60° zwischen beiden Spiegeln

Auch hier steht das Originalobjekt vorn und man kann fünf Spiegelbilder erkennen. Dieses Bild wollen wir schrittweise erklären. Dazu betrachten wir wieder die zugehörige geometrische Konstruktion.

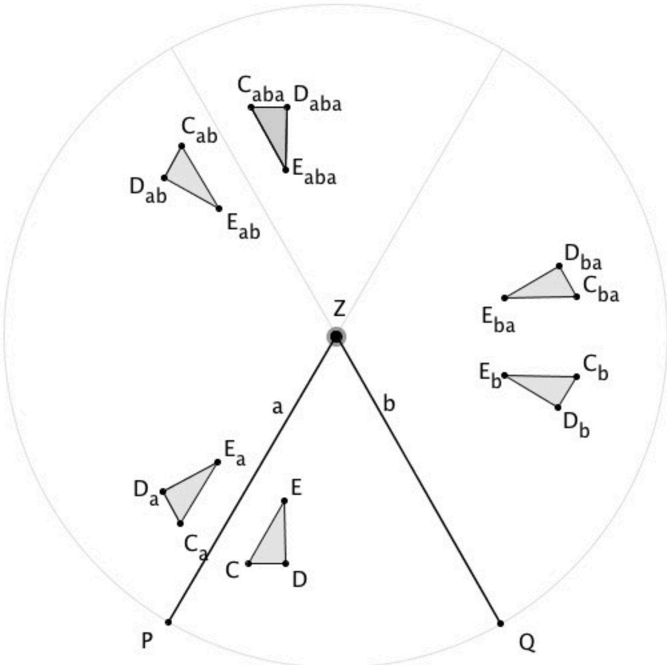

Abb.: 3.9: Die Konstruktion zum Fall 60°

Die Ausgangsfigur ist das Dreieck CDE und die Bildpunkte werden wie oben eingeführt mit Indizes bezeichnet. Wieder sind die direkten Spiegelbilder $C_aD_aE_a$ und $C_bD_bE_b$ unmittelbar einsichtig. Man kann

auch in der geometrischen Konstruktion gut nachvollziehen, dass das Bild $C_aD_aE_a$ an der Achse b weitergespiegelt wird auf $C_{ba}D_{ba}E_{ba}$ bzw. das Bild $C_bD_bE_b$ an der Achse a auf $C_{ab}D_{ab}E_{ab}$.
Bemerkenswert ist, dass das Dreieck $C_{ba}D_{ba}E_{ba}$ auch als Spiegelbild des Dreiecks $C_bD_bE_b$ interpretiert werden kann, wobei allerdings in der Konstruktion (Abb. 3.9) erkennbar ist, dass weder am Spiegel a noch am Spiegel b reflektiert wird. Im Foto kann man sehr wohl einen Spiegel erkennen, der die beiden zugehörigen Bilder aufeinander abbildet. Nur ist dieser Spiegel virtuell und offensichtlich nicht vorhanden. Wir wollen diesen virtuellen Spiegel mit unseren formalen Kenntnissen aus dem Zwei- und Drei-Spiegelungs-Satz herleiten.
In Abb. 3.9 sehen wir, dass der Punkt E_b an einer unbekannten Achse x abgebildet wird auf den Punkt E_{ba}. $E_b \xrightarrow{S_x} E_{ba}$

Formal ausführlicher können wir schreiben

$S_x\left(S_b\left(\mathrm{E}\right)\right)=S_b\left(S_a\left(\mathrm{E}\right)\right)$ Diese Abbildungsbeziehung gilt nicht nur für den Punkt E, sondern auch für C und D und letztlich alle Punkte der Ebene. Also können wir ganz allgemein für die Abbildungen selbst schreiben $S_x \circ S_b = S_b \circ S_a$. Mit dieser Gleichung können wir die unbekannte Spieglung bestimmen. Wird die Spiegelung Sb von rechts auf beiden Seiten hinzugefügt, erhalten wir

$$S_x \circ \underbrace{S_b \circ S_b}_{id} = S_b \circ S_a \circ S_b$$

$$S_x = S_b \circ S_a \circ S_b$$

Die sichtbare Spiegelung an der virtuellen Achse x kann also ausgedrückt werden durch die Spiegelung an b, dann an a und dann wieder an b. Das ist die Verknüpfung von drei Spiegelungen, deren Achsen sich in einem Punkt schneiden. Nach dem Drei-Spiegelungs-Satz ergibt das wieder eine Achsenspiegelung. Diese Achse hatten wir x genannt. Die Lage dieser Achse x können wir auch ermitteln.
Dazu unterscheiden wir die beiden Spiegelungen an b künstlich durch eine Indizierung, so dass gilt: $S_x = S_{b_2} \circ S_a \circ S_{b_1}$, wobei $b_1 = b_2$ ist. Nun verdrehen wir das Geradenpaar a und b_2 unter Beibehaltung des eingeschlossenen Winkels so gegen den Uhrzeigersinn, dass a auf b_1 kommt. D.h., das Geradenpaar wird um 60° weitergedreht. Dann kommt b_2 in eine neue Lage b_3.

$$S_x = S_{b_2} \circ S_a \circ S_{b_1} = S_{b_3} \circ \underbrace{S_{b_1} \circ S_{b_1}}_{id} = S_{b_3}$$

(wird fortgesetzt)

3.2.3 Der allgemeine Fall

(wird fortgesetzt)