



Übungsaufgaben mit Lösungen

1. Kombinatorik als notwendiges Hintergrundwissen
 „Wie viele Türme kann man aus Klötzchen mit (diesen und jenen) Farben bauen?“
 Dabei sollen immer alle vorhandenen Klötzchen zu einem Turm zusammengesetzt werden.
 Beispiel: Wie viele Türme kann man aus 4 Klötzchen bauen, davon ist einer weiß, einer rot und zwei blau?“
 Für diese Aufgabe wollen Sie passende Klötzchen- und Farbzahlen vorgeben, so dass es auf keinen Fall mehr als 25 Türme gibt. Schreiben Sie alle möglichen Klötzchenkombinationen auf. (Klötzchen mit gleicher Farbe beachten! Die Aufgabe ist erst für mindestens zwei Klötzchenfarben interessant).

Lösung 1

Lösungsprinzip: Die Anzahl der verschiedenen Farben wird als oberstes Kriterium vorgegeben. Man hat immer n Steine. Die Aufteilung der Steine auf die Farben wird systematisch durchprobiert.

2 Farben

- a) 1 Stein hat eine Farbe, die übrigen $n-1$ die zweite.

untere Grenze: $n - 1 \geq 2$, also $n \geq 3$

obere Grenze: Anzahl der Türme durch Permutation $\frac{n!}{1!(n-1)!} = n \leq 25$

Lösung: Für $2 \leq n \leq 25$ kann man die Aufgabe stellen: „Du hast einen blauen und $n-1$ rote Steine und sollst aus diesen verschiedene Türmchen mit n Steinen bauen. Wie viele Türmchen gibt das?“

- b) 2 Steine haben eine Farbe, die übrigen $n - 2$ die zweite.

untere Grenze: $n - 2 \geq 2$, denn bei ≥ 1 hat man einen Fall aus a), also $n \geq 4$

obere Grenze: Anzahl der Türme durch Permutation

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \leq 25 \Leftrightarrow n(n-1) \leq 50 \text{ Diese Ungleichung ist erfüllt für } n \leq 7.$$

Lösung: Für $4 \leq n \leq 7$ kann man die Aufgabe stellen: „Du hast 2 blaue und $n-2$ rote Steine ...“

- c) 3 Steine haben eine Farbe, die übrigen $n - 3$ die zweite.

untere Grenze: $n - 3 \geq 3$, denn sonst hat man einen Fall aus a) oder b), also $n \geq 6$

obere Grenze: Anzahl der Türme durch Permutation

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \leq 25 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) \leq 150 \text{ Diese Ungleichung ist für } n \leq 6$$

erfüllt.

Lösung: Für $n = 6$ kann man die Aufgabe stellen: „Du hast 3 blaue und 3 rote Steine ...“



4 oder mehr Steine von der ersten Farbe und 4 oder mehr von der zweiten Farbe sind bei der Grenze „höchstens 25 Türmchen“ nicht möglich.

3 Farben

a) Je ein Stein hat eine Farbe, die übrigen $n - 2$ die dritte.

untere Grenze: $n - 2 \geq 1$, also $n \geq 3$

obere Grenze: Anzahl der Türme durch Permutation $\frac{n!}{1!1!(n-2)!} = n(n-1) \leq 25$ Diese

Ungleichung ist erfüllt für $n \leq 5$.

Lösung: Für $3 \leq n \leq 5$ kann man die Aufgabe stellen: „Du hast einen blauen und einen roten und $n-2$ weiße Steine ...“

b) Ein Stein hat eine Farbe, zwei haben die zweite, die übrigen $n - 3$ die dritte.

untere Grenze: $n - 3 \geq 2$, denn bei ≥ 1 hat man einen Fall aus a), also $n \geq 5$

obere Grenze: Anzahl der Türme durch Permutation

$$\frac{n!}{1!2!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \leq 25 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) \leq 50$$

Diese Ungleichung ist erfüllt für $n \leq 4$.

Folglich gibt es für diesen Fall keine Lösung.

Damit erhält man bei höheren Anzahlen für die Farben erst recht keine Lösungen mehr.

4 Farben

a) Je ein Stein hat eine Farbe, die übrigen $n - 3$ die vierte.

untere Grenze: $n - 3 \geq 1$, also $n \geq 4$

obere Grenze: Anzahl der Türme durch Permutation $\frac{n!}{1!1!1!(n-3)!} = n(n-1)(n-2) \leq 25$

Diese Ungleichung ist erfüllt für $n \leq 4$.

Lösung: Für $n = 4$ kann man die Aufgabe stellen: „Du hast einen blauen, einen roten, einen weißen und einen schwarzen Stein ...“

Bei höheren Anzahlen für die Farben erhält man keine Lösungen mehr.

Übersichtstabelle

Farben	Verteilung d. Farben	Zahl n der Steine	Anzahl der Türme
2	1, $n-1$	$2 \leq n \leq 25$	n
	2, 2	4	6
	2, 3	5	10
	2, 4	6	15
	2, 5	7	21
	3, 3	6	20
3	1, 1, 1	3	6
	1, 1, 2	4	12



	1, 1, 3	5	20
4	1, 1, 1, 1	4	24

2. Beim Spiel „Scrabble“ haben Sie die Buchstaben A D E E H R R R . Wie viele Kombinationen bei Benutzung aller acht Buchstaben können/müssen Sie theoretisch durchtesten? Wenn Ihnen eine Möglichkeit in einer Sekunde klar ist, wie lange dauert das?

Lösung 2

Wir haben 8 Dinge, von denen 2 (E) und 3 (R) gleich sind. Also gibt es

$$\frac{8!}{2! \cdot 3!} = \frac{\cancel{8} \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{\cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 3360 \text{ Permutationen. } 3360 \text{ sec} \approx 1 \text{ h, also brauchen Sie knapp eine Stunde}$$

3. Sie haben die fünf Ziffern 1, 2, 2, 3, 4 und sollen aus diesen alle möglichen fünfstelligen Zahlen bilden. Die Zahlen denken Sie sich der Größe nach geordnet in einer Liste. Folglich ist die erste Zahl der Liste 12234 und die letzte Zahl der Liste 43221.
- Wie viele Zahlen stehen in der Liste?
 - Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 2?
 - Wie viele Zahlen der Liste beginnen mit 3?
 - An welcher Stelle der Liste steht 13242?
 - Welche Zahl steht an der 50. Stelle?

Lösung 3

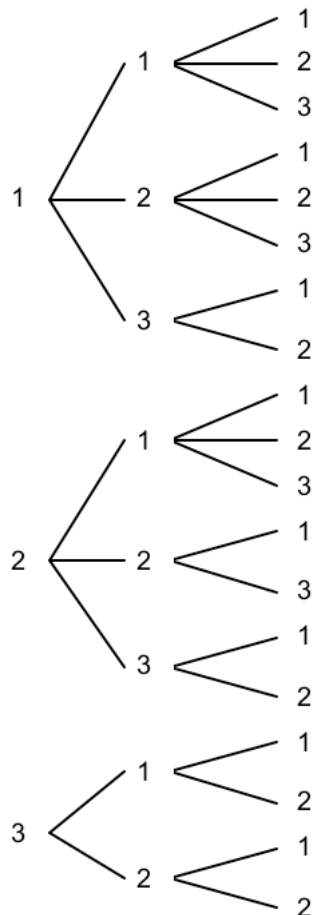
- a. Permutation von 5 Dingen, davon sind 2 gleich: $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Die Liste umfasst also 60 Zahlen.
- b. Schreibt man eine 2 fest an die erste Stelle, so bleiben noch 4 verschiedene Ziffern. Die permutiert man: $4! = 24$. Also beginnen 24 Zahlen mit 2.
- c. Schreibt man eine 3 fest an die erste Stelle, so bleiben noch 4 Ziffern, von denen aber 2 gleich sind. Die Permutationen sind: $\frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12$. Es gibt also 12 Zahlen, die mit 3 beginnen.
- d. Vor 13242 stehen alle Zahlen, die mit 12 beginnen. Das sind 6 Zahlen (Permutation der drei weiteren Ziffern). Dann geht die Liste weiter
7: 13224 8: 13242
Also steht 13242 an der 8. Stelle in der Liste.
- e. Entsprechend zu den Lösungen in b. und c. wissen wir:
12 Zahlen beginnen mit 1, 24 Zahlen beginnen mit 2, 12 Zahlen beginnen mit 3. Dann ist die 49. Zahl der Liste die erste, also kleinste Zahl, die mit 4 beginnt. Das ist 41223. Die nächste, die 50. Zahl, ist 41232.

4. Sie haben als Ziffernvorrat 1,1,1,2,2,3 und sollen daraus dreistellige Zahlen bilden.
- Schreiben Sie alle Möglichkeiten in einer Liste auf. Gehen Sie dabei systematisch vor.
 - Lösen Sie a. mit einem Baumdiagramm.



- c. Erhöhen Sie den Ziffernvorrat auf 1,1,1,2,2,2,3,3,3. Wie viele dreistellige Zahlen gibt es nun? Versuchen Sie, möglichst viele Lösungswege für diese Aufgabe zu finden.

Lösung 4



111
112
113
121
122
123
131
132
211
212
213
221
223
231
232
311
312
321
322

a.

b.

c) Es gibt dann 27 Zahlen

1. Beim Schreiben der Liste hält man die ersten beiden Zahlen fest, dann kann man am Ende immer 1,2,3 schreiben. Auf die mittlere Position kann man auch 1,2,3 schreiben. Macht 9 Kombinationen für die hinteren beiden Stellen. Und an die erste Position kann man auch 1,2,3 schreiben. Macht $3 \cdot 9 = 27$ Kombinationen

2. Im Baumdiagramm gehen von jedem Knoten 3 Zweige aus. Macht $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Zweige am Ende.

3. Jede Zahl ist ein 3-Tupel (...,...,...). An jeder Position hat man 3 Möglichkeiten der Besetzung. Also gibt es $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ Tupel (gleich Zahlen).

5. In einer Urne befinden sich 2 weiße, 3 schwarze und 4 blaue Kugeln. Es werden 4 Kugeln mit einem Hineingreifen gezogen. Stellen Sie in einer systematischen Liste alle Möglichkeiten dar. Beschreiben Sie mit Text, wie Sie vorgehen.
6. Sie würfeln mit einem Würfel vier Mal hintereinander und wollen die Augensumme 7 erzielen. Welche Möglichkeiten ergeben sich? Zeichnen Sie ein Baumdiagramm.
7. Fünf Personen A, B, C, D und E setzen sich an einen runden Tisch. Wie viele Sitzordnungen gibt es? Dabei sollen zwei Sitzordnungen dann als verschieden gelten, wenn wenigstens eine Person wenigstens einen anderen Nachbarn hat. Schreiben Sie alle Sitzordnungen auf und beschreiben Sie, mit welcher Systematik Sie sicherstellen, dass Sie alle Sitzordnungen gefunden haben und keine Sitzordnung doppelt vorkommt.



8. Bernd lauscht außerhalb des Raumes einem Fest. Als alle anstoßen, zählt er die Anzahl der „Kling“ mit und kommt auf 25.
- Warum muss er sich verzählt haben?
 - Angenommen er hat zu wenig gezählt. Was ist dann die untere Grenze für die Anzahl der Leute, die an dem Fest teilnehmen?

Lösung 8

Stoßen n Personen miteinander an, so ist die Anzahl der „Kling“ gleich der Anzahl der Paare, die man bilden kann. Im Urnenmodell entspricht das dem Ziehen von jeweils 2 Kugeln aus n ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Also gibt es bei n Personen

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ „Kling“.}$$

Für die Lösung des vorliegenden Problems probieren wir passende Zahlen für n (etwa n^2 Halbe soll 25 ergeben, das ist ca. für $n = 7$ erfüllt)

$$n = 7: \frac{7 \cdot 6}{2} = 21 \text{ zu klein, } n = 8: \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ zu groß}$$

a) Offensichtlich hat $25 = \frac{n(n-1)}{2}$ keine Lösung in $\mathbb{N}$.

b) Es müssen mindestens 8 Gäste an dem Fest teilnehmen.

9. In einer Fabrik werden 5 verschiedene Maschinenteile zur Gütekontrolle auf drei Kontrolleure A,B,C verteilt. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn A 1 Maschinenteil erhalten soll, B und C je 2 Maschinenteile? Schreiben Sie alle Verteilungen der Teile auf die drei Kontrolleure in einer Liste auf.
10. Eine andere Annäherung an die Permutationsregel.
Wir nennen die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Dingen $P(n)$.
Behauptung $P(n) = n!$
Beweisen Sie die Behauptung durch vollständige Induktion.
Beim Induktionsbeweis, also dem Schritt von n auf $n+1$, sollen Sie anschaulich erläuternd argumentieren. Hier sind Sie als zukünftige LehrerIn gefragt!
11. Polynomialformel
- Betrachten Sie $(a + b + c)^6$
 - Wie oft kommt der Summand a^2b^4 vor?
 - Es kommt der Summand ab^2c^x vor. Bestimmen Sie $x \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie den Koeffizienten.
 - Betrachten Sie $(a + b + c + d)^8$.
 - Wie viele Summanden hat die Entwicklung?
 - Bestimmen Sie den Koeffizienten für $a^2b^2cd^3$.

Lösung 11

Multipliziert man die 6. Potenz aus, so wird das recht mühselig. Man kann die Aufgabe aber auch von einem CAS-System erledigen lassen (z.B. das freie Programm „Eigenmath“)



$$(a+b+c)^6$$

$$30 a b c^4 + 60 a b^2 c^3 + 60 a b^3 c^2 + 30 a b^4 c + 6 a b^5 + 6 a c^5 + 6 b c^5 + a^6 + b^6$$

$$+ c^6 + 60 a^2 b c^3 + 90 a^2 b^2 c^2 + 60 a^2 b^3 c + 15 a^2 b^4 + 15 a^2 c^4 + 60 a^3 b c^2 + 60 a^3 b^2 c + 20 a^3 b^3$$

$$+ 20 a^3 c^3 + 30 a^4 b c + 15 a^4 b^2 + 15 a^4 c^2 + 6 a^5 b + 6 a^5 c + 15 b^2 c^4 + 20 b^3 c^3 + 15 b^4 c^2 + 6 b^5 c$$

a. a. Der Summand $a^2 b^4$ entsteht, wenn man beim Ausmultiplizieren zwei Mal das a und vier Mal das b wählt. Das kann man (allgemeine Permutationsregel) auf $\frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

Arten.

a. b. Die Summe der Exponenten ist immer 6, also muss $x = 3$ sein. Der Summand ab^2c^3 hat den Faktor: $\frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 60$.

b. c. Das Zusammenstellen eines Summanden des Ergebnisses ist ein Ziehen aus einer Urne mit $n = 4$ Kugeln (a, b, c oder d) mit Zurücklegen (ein Buchstabe darf ja immer wieder gewählt werden) ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Hier wird $k = 8$ Mal gezogen.

$$\binom{n-1+k}{k} = \binom{11}{8} = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 165 \text{ Also gibt es Summanden.}$$

$$\text{b. d. } \frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{4} = 56 \cdot 30 = 1680$$

12. Bahnkarten in Budapest

Die abgebildeten Bahn- und Metrokarten stammen aus Budapest. Die linke Karte wurde nach dem alten Verfahren entwertet. Hierbei werden bei der Entwertung zwei, drei oder vier Löcher in die Karte gestanzt. Das Stanzmuster eines Automaten ändert sich erst am nächsten Tag. Auf der rechten Karte befindet sich gemäß der neuen Entwertungsmethode ein Stempel, der das Datum und die Uhrzeit enthält. Zu dieser Änderung ist es gekommen, da der ungarische Mathematiker Ödön Vancso die Verwaltung des örtlichen Nahverkehrs darauf hingewiesen hat, dass man gestanzte Karten doch auch sammeln könne. Verfügt man über alle möglichen Stanzmuster, so legt man nur einen Streifen Papier in den Stanzautomat und sucht in der Sammlung anschließend die passende bereits vorgestanzte Karte.



- Wie viele solcher Karten müsste man sammeln, um alle möglichen Stanzmuster zu besitzen?
- Passen alle Karten schätzungsweise in eine Aktentasche?
- Wie lange dauert es, seine Kartensammlung vollständig zu durchsuchen, wenn man mit einer Karte 2 Sekunden beschäftigt ist?

**Lösung 12**

a) Wir zerlegen nach der Additionsregel die Anzahl der Möglichkeiten in drei disjunkte Fälle:

(A) Es werden 2 Löcher gestanzt. D.h. es werden 2 von den 9 Plätzen ausgewählt ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge.

Das ergibt $\binom{9}{2} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ Möglichkeiten.

(B) Es werden 3 Löcher gestanzt: $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 84$ Möglichkeiten.

(C) Es werden 4 Löcher gestanzt: $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$ Möglichkeiten.

Also gibt es insgesamt $36 + 84 + 126 = 246$ verschiedene Lochmuster.

b) Wenn die Kärtchen ungefähr das Format der Bremer Streifenkarten haben, bilden 246 Karten kein Transportproblem.

c) Das ergibt $246 \cdot 2s = 492s = 8 \text{ min } 12s$. Das ist kein großes Problem. Wenn man die Karten nach 2, 3 oder 4 Löchern vorsortiert hat, geht es noch schneller.

13. (*Mathematik-Olympiade 2004/05, Aufgabe für die 7. Klasse, Landesrunde*)

Auf wie viele verschiedene Arten kann man die Flächen eines Würfels mit sechs gegebenen Farben färben, wenn jede Farbe nur für eine Fläche verwendet werden darf?

Als verschieden gelten nur die Färbungen, die nicht durch Drehung des Würfels ineinander übergeführt werden können.

Lösung 13

1. Variante: Wir unterscheiden zunächst Drehungen. Dann werden die sechs Farben auf die sechs Flächen ohne Wiederholung mit Berücksichtigung der Reihenfolge verteilt.

Das sind $6! = 720$ Möglichkeiten.

Nun muss man zählen, auf wie viele Arten ein Würfel durch Drehung anders vor einen auf den Tisch gelegt werden kann. Jede der 6 Zahlen kann unten sein. Dann kann jede der 4 Seitenflächen vorn liegen. Folglich gibt es 24 Möglichkeiten, den Würfel zu verdrehen.

Also fallen immer 24 der 720 Färbungen durch Drehen zu einem Fall zusammen.

Macht $720 : 24 = 30$ Fälle.

2. Variante: Die Farben seien rot, blau, grün, gelb, orange, weiß. Die untere Fläche soll immer rot sein. Jetzt zerlegen wir die Betrachtung in zwei disjunkte Fälle:

(A) Blau ist oben. Dann ist hinten immer grün und die restlichen 3 Farben können auf die verbleibenden Seitenflächen verteilt werden. Das geht auf $3! = 6$ Arten.

(B) Blau ist nicht oben. Dann gibt es für die obere Fläche 4 Farben zu verteilen und blau kommt nach hinten. Die übrigen 3 Flächen werden mit den verbleibenden 3 Farben belegt, das geht auf $3! = 6$ Arten. Macht in der Kombination $6 \cdot 4 = 24$ Färbungen.

(A) und (B) zusammen ergeben $6 + 24 = 30$ Fälle.

14. (*Beispiele für ein Urnenmodell mit z.T. ununterscheidbaren Dingen*)

In einer Urne liegen 4 weiße und 3 schwarze Kugeln (sonst gibt es keine weitere Unterscheidung). Sie ziehen aus der Urne nacheinander 4 Kugeln.

Wie viele Möglichkeiten für das Ziehen gibt es?



- a. mit Zurücklegen
 - i. mit Berücksichtigung der Reihenfolge
 - ii. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
- b. ohne Zurücklegen
 - iii. mit Berücksichtigung der Reihenfolge
 - iv. ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Lösung 14

a. i. Da mit Zurücklegen gezogen wird aber nur die Farben unterschieden werden, gibt es immer $n = 2$ Farben bei $k = 4$ Ziehungen. Die Formel n^k liefert dann $2^4 = 16$ Möglichkeiten.

ii. Ohne Berücksichtigung der Reihenfolge gilt

die Formel $\binom{n-1+k}{k}$, also konkret $\binom{5}{4} = 5$ Möglichkeiten.

Die sind schnell aufgezählt, nämlich (www), (wwws), (wwss), (wsss) und (ssss).

b. Da die Farben mit mehreren Kugeln vertreten sind, also nicht unterscheidbar sind, gelten nicht die üblichen Formeln des Urnenmodells. Das geht von n unterscheidbaren Kugeln aus. Also muss man über diesen Fall abseits der vorgefertigten Formel nachdenken.

i. Legt man nicht zurück, so ist der Fall (ssss) nicht möglich. Das ist aber der einzige Fall, der entfällt. Also gibt es 15 Möglichkeiten.

ii. Auch hier entfällt die Möglichkeit (ssss) als einzige. Es gibt 4 Möglichkeiten.

15. Versuchen Sie, die Aufgabe 14 jeweils zu verallgemeinern auf w weiße und s schwarze Kugeln.

16.

- a. Welche Auswirkungen haben die Unterscheidungen „mit - ohne Zurücklegen“ und „mit - ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“ auf die Anzahl der Möglichkeiten?
- b. Begründen Sie damit, welche Zahl für jedes $n \geq 2$, $k \in \mathbb{N}_0$ am größten, am kleinsten

und zwischen diesen Extremen sein muss: $\binom{n}{k}$, $\binom{n+k-1}{k}$, n^k oder $\frac{n!}{(n-k)!}$

- c. Welche Zahlen lassen sich schwer vergleichen? Warum ist das so?

17. Wir hatten in der Vorlesung an einem Beispiel gesehen, dass $\frac{n^k}{k!}$ keine natürliche Zahl

sein muss. Suchen Sie zu $k = 8$

- a. die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}$
- b. eine weitere Zahl $n \in \mathbb{N}$,

so dass doch $\frac{n^k}{k!}$ eine natürliche Zahl ist.

18. (eine Fleißaufgabe)

- a. Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, mit denen man $k = 4$ Zahlen aus $n = 4$ ziehen kann, wobei die gezogene Zahl wieder zurückgelegt wird und bei den Ergebnissen die Reihenfolge nicht beachtet wird.
- b. Schreiben Sie alle Möglichkeiten in einer Liste auf.



- c. Schreiben Sie hinter die einzelnen Elemente der Liste aus b) die Anzahl der möglichen Vertauschungen.
 z.B. $\{1, 2, 3, 3\}$ 12
 (da es 12 Vertauschungen (Permutationen) von 4 verschiedenen Dingen, davon 2 gleich, gibt)
- d. Zählen Sie die Anzahl der Permutationen in c) zusammen. Welche Zahl haben Sie nun bestimmt? Prüfen Sie kritisch und äußern Sie sich sinnvoll.

19. In der Vorlesung hatten wir berechnet, dass es beim Lotto $\binom{49}{6}$ verschiedene Tipps gibt.

- a. Berechnen Sie $\binom{49}{6}$ exakt.
- b. Die Tabelle zeigt die Daten der Ausspielung von Samstag, den 10.01.09.

Lottoquoten vom Samstag, 10.01.09		
Gewinnklasse		Gewinnquoten
I	6 Richtige und SZ	0 x 13.646.632,60 EUR
II	6 Richtige	6 x 399.122,80 EUR
III	5 Richtige und ZZ	49 x 30.545,10 EUR
IV	5 Richtige	1423 x 2.734,60 EUR
V	4 Richtige und ZZ	4998 x 119,70 EUR
VI	4 Richtige	75772 x 39,50 EUR
VII	3 Richtige und ZZ	125064 x 19,10 EUR
VIII	3 Richtige	1396210 x 9,40 EUR
Alle Angaben ohne Gewähr		

Angenommen, wir hätten einen Monstertipp abgegeben, d.h. Lottoscheine, auf denen jeder der $\binom{49}{6}$ möglichen Tipps genau einmal vorkommt. Ein Tipp kostet 0,75 €. Wie viel investieren wir in diesen Monstertipp?

- c. Berechnen Sie für die Gewinnklassen II bis VIII, wie viele Tipps jeweils in welche Gewinnklasse fallen.

Beispielansatz für Klasse 5, 4 Richtige und ZZ (Zusatzzahl): $\binom{6}{4} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{42}{1}$, denn aus den 6 Gewinnzahlen werden 4 ausgewählt, aus der einen Zusatzzahl eine und aus den 42 „Nieten“ eine.

- d. Berechnen Sie nun, wie viel Geld wir mit dem Monstertipp am letzten Wochenende gewonnen hätten.
- e. Berechnen Sie noch, wie viele unserer Tipps nur zwei Richtige, eine Richtige und gar keine Richtige haben und bilden Sie die Summe mit den Gewinntipps aus c. Alle zusammen sollten die Gesamtzahl der Tipps von $\binom{49}{6}$ ergeben.



20. zur Übersetzung in Strich-Punkt-Folgen beim Ziehen mit Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
- Übersetzen Sie in Strich-Punkt-Folgen
 - $n = 6$, Ziehung 1, 1, 2, 4, 5, 6
 - $n = 7$, Ziehung 1, 1, 1, 5, 5, 5, 7
 - Übersetzen Sie in „Klartext“
 $|ooo||oo|$ und $||ooooo||oo|$

Lösung 20

- a. i. $oo|o||o|o|o$ ii. $ooo|||ooo||o$
 b. i. 2, 2, 2, 4, 4 $n = 5$ ii. 3, 3, 3, 3, 3, 6, 6 $n = 7$

21. *Mathematik-Olympiade Klasse 9, 3.Runde, 1.Aufgabe*

Für eine Projektarbeit sollen die 9 Schüler eines Kurses in Gruppen aufgeteilt werden. Dabei sind nur Gruppen zu zwei oder zu drei Schülern zugelassen.

Wie viele Möglichkeiten für die Gruppeneinteilung gibt es, wenn nicht nur berücksichtigt wird, wie viele Schüler in einer Gruppe sind, sondern auch welche?

Lösung 21

Zunächst unterscheiden wir nach dem Additionssatz die beiden disjunkten Fälle

(A) es werden 3 Dreiergruppen gebildet

(B) es werden 1 Dreiergruppe und 3 Zweiergruppen gebildet

zu (A) Die Dreiergruppen werden dadurch gebildet, dass je drei Karten mit a, b oder c an die 9 Schüler verteilt werden. Nach der allgemeinen Permutationsformel geht das auf

$\frac{9!}{3! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680$ Arten. Nun ist eine Schülergruppe aber nicht eine andere, wenn sie durch die drei „a“ oder durch die drei „b“ ermittelt wurden. D.h. die Dreiergruppen können untereinander vertauscht werden, ohne dass sich eine neue Verteilung ergibt. Also muss das Ergebnis noch durch $3!$ dividiert werden: $\frac{1680}{3!} = 280$.

Zu (B) Hier werden 3 Karten mit a, und je zwei Karten mit b, c und d verteilt. Das geht auf $\frac{9!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!} = 7560$ Arten. Da die drei Zweiergruppen wieder untereinander vertauscht

werden können, muss wieder durch $3!$ dividiert werden: $\frac{7560}{3!} = 1260$.

Für das Endergebnis müssen die Fälle aus (A) und (B) addiert werden: $280 + 1260 = 1540$.

Damit gibt es insgesamt 1540 Möglichkeiten, die Gruppen nach der genannten Bedingung zu bilden.

22. Bei einem Kartenspiel gibt es 60 verschiedene Karten. Jeder der 3 Mitspieler bekommt 6 Karten, die restlichen 42 Karten kommen als Stapel in die Mitte. Bei der Frage, wie viele Kartenverteilungen es gibt, erhalten Sie als Lösung:



$$\begin{aligned}
 1. & \quad \binom{60}{6} \cdot \binom{54}{6} \cdot \binom{48}{6} \\
 2. & \quad \frac{60!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 42!} \\
 3. & \quad \binom{60}{18} \cdot \left[\binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6} \cdot \binom{6}{6} \right]
 \end{aligned}$$

- Interpretieren Sie die drei Lösungsansätze in ihrem kombinatorischen Grundverständnis. Wie wurde jeweils gedacht?
- Zeigen Sie durch passende Umformungen, dass alle drei Ergebnisse gleich sind.

Lösung 22

a)

1. Lösungsansatz: $\binom{60}{6} \binom{54}{6} \binom{48}{6}$

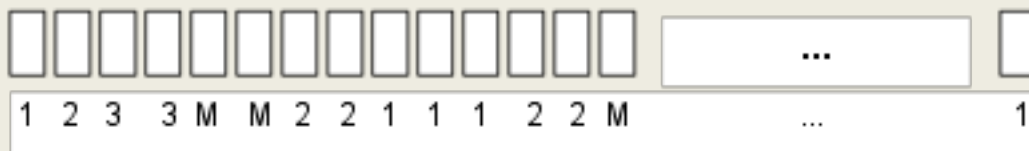
$\binom{60}{6}$: Aus den gesamten 60 Karten werden 6 gezogen, ohne Zurücklegen, ohne

Berücksichtigung der Reihenfolge

Ebenso sind $\binom{54}{6}$ und $\binom{48}{6}$ zu interpretieren für die zweiten und dritten Spieler. Alle

einzelnen Auswahlen werden miteinander kombiniert, also die Zahlen nach der Multiplikationsregel miteinander multipliziert.

2. Lösungsansatz: $\frac{60!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 42!}$



Unter die 60 Karten schreibt man 6 Mal „1“, 6 Mal „2“, 6 Mal „3“ und 42 Mal „M“. Jede mögliche Kartenverteilung ist jede Permutation dieser 60 Zeichen.

3. Lösungsansatz: $\binom{60}{18} \left[\binom{18}{6} \binom{12}{6} \binom{6}{6} \right]$

Man sucht zunächst 18 Karten aus den 60 aus (ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) und diese 18 Karten werden an die drei Spieler verteilt (wieder ohne Zurücklegen, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge). Diese Möglichkeiten werden miteinander kombiniert.

b)

zu 1. $\binom{60}{6} \binom{54}{6} \binom{48}{6} = \frac{60!}{6! \cdot 54!} \cdot \frac{54!}{6! \cdot 48!} \cdot \frac{48!}{6! \cdot 42!} = \frac{60!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 42!}$



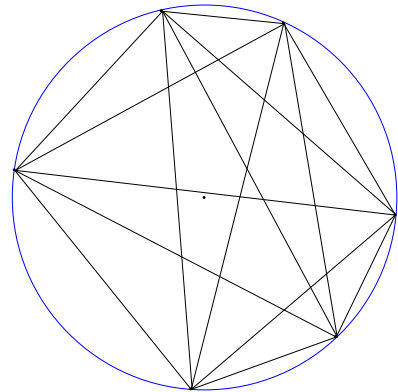
$$\text{zu 3. } \binom{60}{18} \left[\binom{18}{6} \binom{12}{6} \binom{6}{6} \right] = \frac{60!}{18! \cdot 42!} \left[\frac{18!}{6! \cdot 12!} \cdot \frac{12!}{6! \cdot 6!} \cdot \frac{6!}{6! \cdot 0!} \right] = \frac{60!}{6! \cdot 6! \cdot 6! \cdot 42!}$$

Die Rechenterme des 1. und 3. Ansatzes lassen sich in den des 2. Ansatzes umwandeln.

23. Auf einem Kreis liegen n Punkte. Jeder Punkt ist mit

jedem verbunden. (Dann gibt es $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Verbindungsstrecken.) Die Punkte liegen so (unregelmäßig), dass sich nie drei oder mehr Verbindungsstrecken in einem Punkt schneiden. Wie viele Schnittpunkte gibt es dann?



Lösung 23

Man sucht sich vier beliebige Punkte heraus. Da diese auf dem Kreis liegen, bilden sie immer ein Viereck mit einem Diagonalschnittpunkt. Das ist einer der gesuchten Schnittpunkte.

Also gibt es $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$ Schnittpunkte.

Im Bild ist $n = 6$. Also sind es dort $\frac{1}{24} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 15$ Schnittpunkte.