4 Abbildungen von Funktionsgraphen

Der Graph zu einer gegebenen Funktion f ist die Menge aller Punkte, deren Koordinaten $\left(x;f(x)\right)$ sind. Für einen einzelnen Punkt des Graphen gibt man einen Wert *x* aus dem Definitionsbereich vor, berechnet dann *f*(*x*) und erhält so die *y*-Koordinate des Punktes. Weiterhin ist nun eine Abbildung *A* der Ebene auf sich gegeben (siehe Kap. 3). Die Abbildung beschreibt durch zwei Abbildungsgleichungen, wie die Koordinaten des Bildpunktes $\mathrm{P}'\left(x';y'\right)$ zu einem Ausgangspunkt $\mathrm{P}\left(x;y\right)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} x' &= A_x\left(x\right) \\ y' &= A_y\left(y\right) \end{aligned}.$$

Folglich kann man einen Funktionsgraphen abbilden, indem man punktweise vorgeht. Es werden also alle Punkte des Graphen von f mit den Abbildungsgleichungen von *A* abgebildet.
Die Frage ist nun, ob es für die Punkte des Bildgrafen wieder eine Funktion gibt, die den Zusammenhang zwischen den Bildkoordinaten *x*' und *y*' beschreibt. Im Allgemeinen wird uns das nicht gelingen, da bei der Abbildung mit *A* die Funktionseigenschaft verloren gehen kann, nämlich dass jedem *x*' eindeutig ein *y*' zugeordnet wird. Ist die Zuordnung aber eindeutig, so ist die Frage, welche Funktion $\tilde{f}$[3] durch *f* und *A* definiert ist.

Schauen wir uns dazu zunächst ein Beispiel an.
Gegeben ist die Normalparabel, also der Graph zur Funktion *f* mit der Gleichung $f(x)=x^2$. Diesen wollen wir verschieben mit dem Vektor $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. Die Abbildungsgleichungen lauten dann $\begin{aligned} x' &= x+1 \\ y' &= y+3 \end{aligned}$

Wie oben beschrieben können wir nun einige Beispiel-Zuordnungspaare abbilden:
(0;0) → (1;3)   (1;1) → (2;4)   (2;4) → (3;7)   (3;9) → (4;12)
Der Zusammenhang zwischen x' und y' ist nicht leicht zu erkennen. Berücksichtigen wir jedoch, wie die Zahlenpaare (x';y') entstanden sind, können wir die Rechnung $y'=\left(x'-1\right)^2+3$ rekonstruieren und die einzelnen Elemente auch begründen:

- $x'-1$ ergibt sich aus der Abbildung der *x*-Koordinate, hier allerdings „verkehrt herum"
- $\left(\quad\right)^2$ ergibt sich aus der ursprünglichen Funktionsvorschrift von *f*
- $\ldots+3$ ergibt sich aus der Abbildung der *y*-Koordinate

Zeichnet man zu beiden Funktionsgleichungen den Graphen, erkennt man, dass die neue Zuordnungsvorschrift korrekt ist.

---

[3] Naheliegend wäre die Bezeichnung f'. Das ist allerdings schon für die Ableitung einer Funktion vergeben.

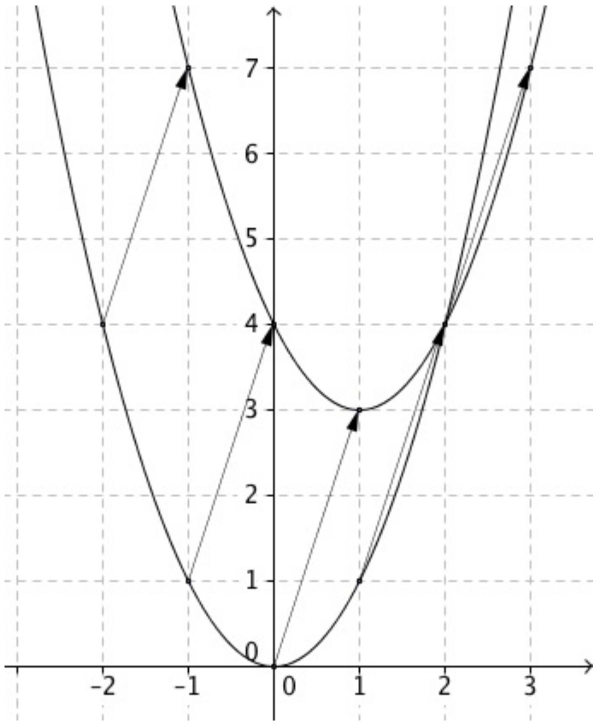

Abb. 4.1: Die Normalparabel ($y = x^2$) und die verschobene Parabel zu $y = (x-1)^2 + 3$

Dieses Vorgehen zur Ermittlung des Funktionsterms für die verschobene Parabel ist gut nachzuvollziehen und verallgemeinerbar.

Wird die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ mit dem Vektor $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ verschoben (die Abbildungsgleichungen sind $\begin{matrix} x' = x + p \\ y' = y + q \end{matrix}$), so erhält man für die verschobene Parabel die Funktionsgleichung $y = (x-p)^2 + q$. An diesem Schema ist verwunderlich, dass die Transformation der x-Koordinate „verkehrt herum" angewendet wird, während die Funktion und die Transformation der y-Koordinate direkt angewendet werden. Die Logik dieses Vorgehens wird im nebenstehenden Diagramm deutlich.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\text{quadrieren}"] \arrow[d, shift left, "+p"] & y \arrow[d, "+q"] \\ x' \arrow[u, shift left, "-p"] \arrow[r, "\text{ist gesucht}"'] & y' \end{tikzcd}$$

Abb. 4.2: Das Diagramm für die Verschiebung der Normalparabel

Wir suchen einen Formalismus, der uns von x' zu y' bringt. Verwenden wir bekannte Rechenwege, so müssen wir von x' zu x gegen die in der Abbildungsvorschrift gegebene Richtung laufen, also die Rechnung umkehren, während in den beiden anderen

Teilen die Richtung der vorgegebenen Gleichungen beibehalten werden kann.

Wir wiederholen nun das Vorgehen in dem Beispiel in einer allgemeinen Betrachtung.
Gegeben ist eine Funktion *f* und die Menge aller Zuordnungspaare, die im Koordinatensystem den Graph G_f der Funktion darstellen.

$G_f = \{(x;y) \mid x \in D_f \text{ und } y = f(x)\}$

Dieser Graph wird punktweise mit einer Abbildung A der Ebene auf sich in einen Bildgraph G'_f abgebildet.

$G'_f = \{(x';y') \mid (x;y) \in G_f \text{ und } x' = A_x(x) \text{ und } y' = A_y(y)\}$.

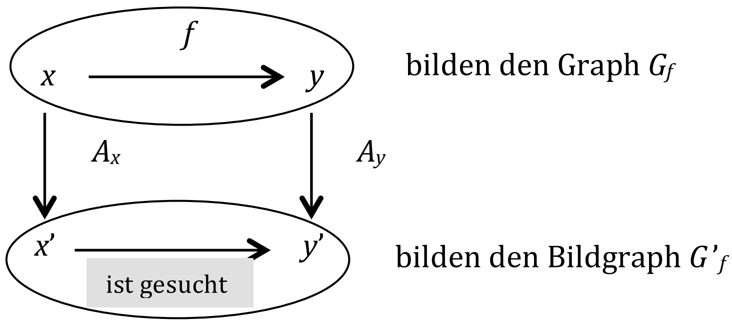

Abb. 4.3: Das Schema des Abbilden eines Funktionsgraphen

Gesucht ist nun die Funktionsgleichung für die Zuordnungspaare (x';y'), also der Zusammenhang $y' = \tilde{f}(x')$. Der Pfad im Diagramm von *x'* über *x* und *y* zu *y'* ist formal:

$$x = A_x^{-1}(x')$$

$$y = f(x)$$

$$\frac{y' = A_y(y)}{y' = A_y\left(f\left(A_x^{-1}(x')\right)\right)}$$

Man bildet also die inverse Transformation für die x-Koordinate, setzt das in den Funktionsterm für x ein und wendet abschließend die Transformation für die y-Koordinate an.
Wenden wir diese allgemeine Erkenntnis auf eine weitere Verschiebung auf einen Funktionsgraphen an. Wir verschieben den Graph zu $y = f(x) = 0{,}2x^3 - x$ um 2 Einheiten nach rechts und 1 Einheit nach oben. Die Abbildungsgleichungen lauten also:
$x' = A_x(x) = x + 2$ und $y' = A_y(y) = y + 1$. Dann ist die inverse Abbildung für die x-Koordinate $x = A_x^{-1} = x' - 2$.
Setzen wir das in die Funktionsgleichung für f ein, erhalten wir $y = 0{,}2(x'-2)^3 - (x'-2)$. Im letzten Schritt wird noch die y-

Koordinate transformiert und wir erhalten $y' = 0{,}2\left(x'-2\right)^3 - \left(x'-2\right) + 1$. Das ist für eine Polynomfunktion eine ungewöhnliche Darstellung, lässt aber sehr schön ihre Entstehung erkennen.

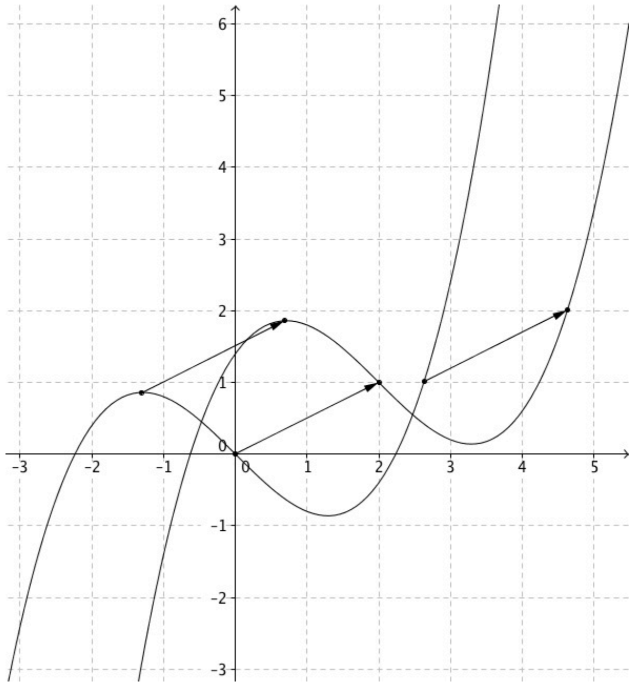

Abb. 4.4: Der mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ verschobene kubische Graph

Wir gehen nun spezielle Abbildungen der Ebene auf sich durch und besprechen dabei spezielle Eigenschaften. Für die Funktionsgleichungen in den Bildkoordinaten *x*' und *y*' schreiben wir doch gleich wieder die herkömmlichen Koordinatenbezeichnungen *x* und *y*.

4.1 Verschiebungen

Gemäß Kapitel 3.1 sind bei einer Verschiebung um den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ die Abbildungsgleichungen $\begin{matrix} x' = x + a_x \\ y' = y + a_y \end{matrix}$. Dann ist die inverse Abbildung für die x-Koordinate $x = x' - a_x$. Wird der Ausgangsgraph zu einer Funktion *f* beschrieben durch $y = f(x)$, so wird der verschobene Graph beschrieben durch $y = f\left(x - a_x\right) + a_y$.

4.1.1 Lineare Funktionen

Wir gehen von einer linearen Funktion aus, die durch den Ursprung verläuft. Folglich wird der Graph durch $y = mx$ beschrieben mit der Steigung *m*. Ist nun ein Punkt P(p_x;p_y) gegeben und die Gleichung der Geraden gesucht, die die Steigung *m* hat und durch P verläuft, so verschieben wir den Graph zu $y = mx$ um den Vektor $\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}$ und erhalten so die Gleichung $y = m(x - p_x) + p_y$. Das ist im Prinzip die Punkt-Steigungsform, wie sie in 2.1.1 vorgestellt wurde.

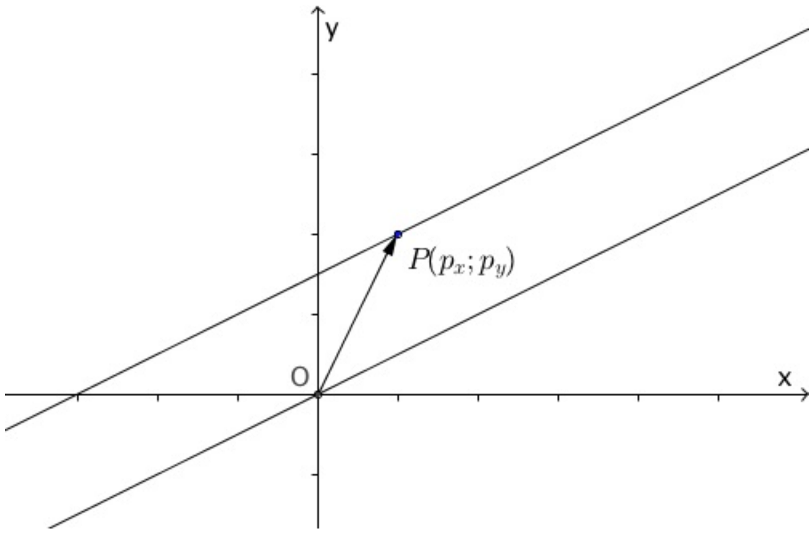

Abb. 4.5: Die verschobene Gerade verläuft durch den gegebenen Punkt

4.1.2 Quadratische Funktionen

Hier gehen wir von der Parabel aus, deren Scheitelpunkt im Ursprung liegt und die ggfs. mit dem Parameter *a* verformt ist. Ist nun allgemein der Scheitelpunkt $S(s_x; s_y)$ gegeben, so erhält man die Gleichung für die entsprechende Parabel, indem man den Scheitelpunkt von O(0;0) in den neuen Scheitelpunkt S verschiebt. Die Parabel mit der Gleichung $y = ax^2$ wird verschoben zur Parabel mit der Gleichung $y = a(x - s_x)^2 + s_y$. Das ist die in 2.2 eingeführte Scheitelpunktsform der Parabel/quadratischen Funktion.

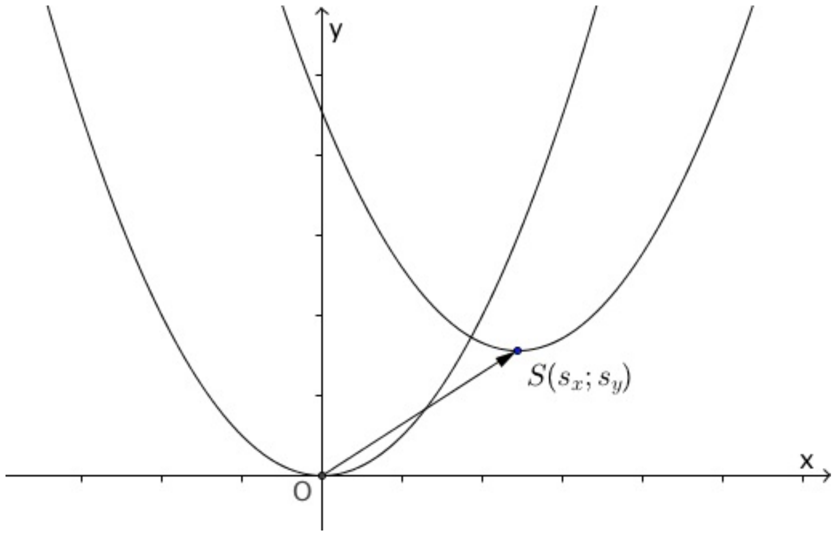

Abb. 4.6: Die verschobene Parabel mit dem Scheitelpunkt S

4.1.3 Periodische Funktionen

Mit Hilfe der Verschiebung eines Funktionsgraphen können wir den Begriff der periodischen Funktion einführen.

Definition 4.1
Eine Funktion *f* heißt **periodisch**, wenn eine reelle Zahl $p \neq 0$ existiert, so dass eine Verschiebung des Funktionsgraphen von *f* um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}$ den Graphen auf sich selbst abbildet. Für alle Werte *x, x-p* der Definitionsmenge gilt: $f(x-p) = f(x)$.
Die kleinste positive Zahl *p*, die diese Gleichung erfüllt, wird die **Periode** der Funktion genannt.

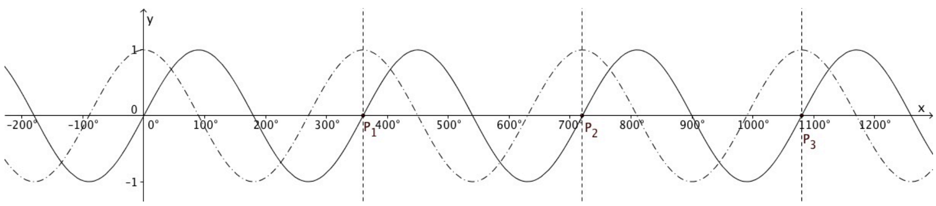

Abb. 4.7: Die Graphen der sin- und cos-Funktion (Strich-Punkt)

Aus den Graphen der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion (Abb. 4.7) ist ersichtlich, dass diese Funktionen periodisch sind: die Funktionswerte sind in Abständen von 360°, 720°, 1080°,… identisch. Der kleinste Wert ist 360°; dies ist also die Periode dieser Funktionen. Die Tangensfunktion ist ebenfalls periodisch, allerdings mit der Periode *p*=180°.

Abb. 4.7 legt ebenfalls nahe, dass der um 90° nach links verschobene Graph der Sinusfunktion den der Kosinusfunktion ergibt. Für die Funktionsterme ergibt sich dann der Zusammenhang: $\sin(x+90°)=\cos(x)$.

4.2 Achsenspiegelung

In Kapitel 3 hatten wir uns bereits auf die Spiegelung an den Koordinatenachsen beschränkt, da diese die Funktionseigenschaft erhalten.

4.2.1 Spiegelung an der x-Achse

Gemäß Kapitel 3.2.2 lauten die Abbildungsgleichungen $\begin{array}{l} x'=x \\ y'=-y \end{array}$.

Wird der Ausgangsgraph durch $y=f(x)$ beschrieben, so ist die Gleichung zum gespiegelten Graph $y=-f(x)$. Folglich wird für den gespiegelten Graphen der Funktionsterm mit -1 multipliziert.

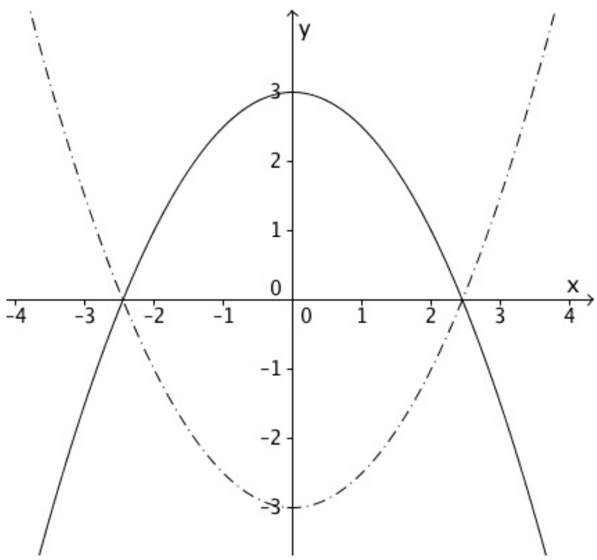

Abb. 4.8: Beispiel: Der Graph zu $y=0{,}5x^2-3$ (Punkt-Strich-Linie) wird gespiegelt in den Graph zu $y=-0{,}5x^2+3$.

4.2.2 Spiegelung an der y-Achse

Hier lauten die Abbildungsgleichungen laut Kapitel 3.2.1 $\begin{array}{l} x'=-x \\ y'=y \end{array}$.

Für die Anwendung der x-Koordinaten-Transformation brauchen wir die inverse Abbildung $x=-x'$. Dann wird der Graph zu $y=f(x)$ in den Graphen zu $y=f(-x)$ gespiegelt.

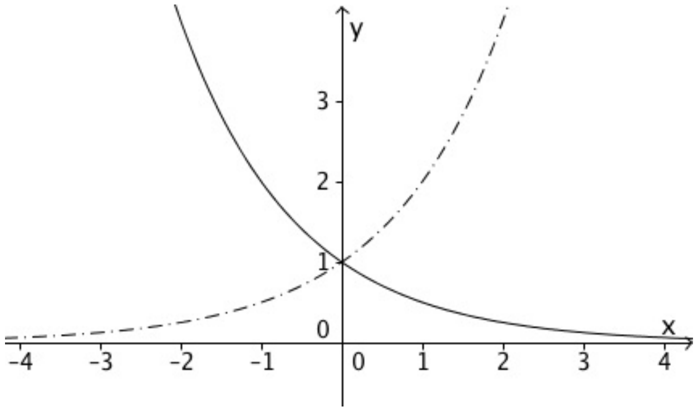

Abb. 4.8: Beispiel: Der Graph zu $y = 2^x$ (Punkt-Strich-Linie) wird gespiegelt in den Graph zu $y = 2^{-x} = 0{,}5^x$.

4.2.3 Achsensymmetrische Graphen

in Arbeit

4.3 Drehungen

in Arbeit

4.3.1 Drehung um 180° um den Ursprung

in Arbeit

4.3.2 Punktsymmetrische Graphen

in Arbeit

4.4 Streckungen

in Arbeit

4.4.1 Streckung in Bezug auf die x-Achse

in Arbeit

4.4.2 Streckung in Bezug auf die y-Achse

in Arbeit

4.4.3 Zentrische Streckung am Ursprung

in Arbeit